

1

【解答】

(1)	(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	
		1	3	6	3	6	1	
	(b)	キ	ク					
		9	1					
(c)		ケ	コ					
		1	4					
(d)		サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
		1	3	3	4	2	2	3

(2)	(a)	テ	ト					
		1	3					
	(b)	ナ	ニ	ヌ				
		4	3	2				
(c)		ネ	ノ	ハ	ヒ	フ		
		8	9	3	6	3		

【解説】

(1)(a)

$$g_1(x)=(x-4)^2, g_2(x)=x-2, g_3(x)=-x^2+6x+4 \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} g_1(x)-g_2(x) &= x^2-9x+18 \\ &= (x-3)(x-6) \\ g_1(x)-g_3(x) &= 2x^2-14x+12 \\ &= 2(x-1)(x-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x)-g_3(x) &= x^2-5x-6 \\ &= (x+1)(x-6) \end{aligned}$$

である. よって, 各範囲における $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ の大小関係, および, そのとき

$$f(x)=\min\{\max\{g_1(x), g_2(x)\}, g_3(x)\}$$

が $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ のうちのどれに等しいか, をまとめると下表のようになる.

x	...	-1	...	1
$g_1(x)-g_2(x)$	+	+	+	+
$g_1(x)-g_3(x)$	+	+	+	0
$g_2(x)-g_3(x)$	+	0	-	-
大小関係	$g_1(x)>g_2(x)$ $>g_3(x)$	$g_1(x)>g_2(x)$ $=g_3(x)$	$g_1(x)>g_3(x)$ $>g_2(x)$	$g_1(x)=g_3(x)$ $>g_2(x)$
$f(x)=$	$g_3(x)$	$g_2(x)=g_3(x)$	$g_1(x)$	$g_1(x)=g_3(x)$

...	3	...	6	...
+	0	-	0	+
-	-	-	0	+
-	-	-	0	+
$g_3(x)>g_1(x)$ $>g_2(x)$	$g_3(x)>g_1(x)$ $=g_2(x)$	$g_3(x)>g_2(x)$ $>g_1(x)$	$g_1(x)=g_2(x)$ $=g_3(x)$	$g_1(x)>g_2(x)$ $>g_3(x)$
$g_1(x)$	$g_1(x)=g_2(x)$	$g_2(x)$	$g_1(x)=g_2(x)$ $=g_3(x)$	$g_3(x)$

上表より, $f(x)=(x-4)^2$ すなわち $f(x)=g_1(x)$ となる必要十分条件は $1\leq x\leq 3$ または $x=6$

である. また, $f(x)=x-2$ すなわち $f(x)=g_2(x)$ となる必要十分条件は $3\leq x\leq 6$ または

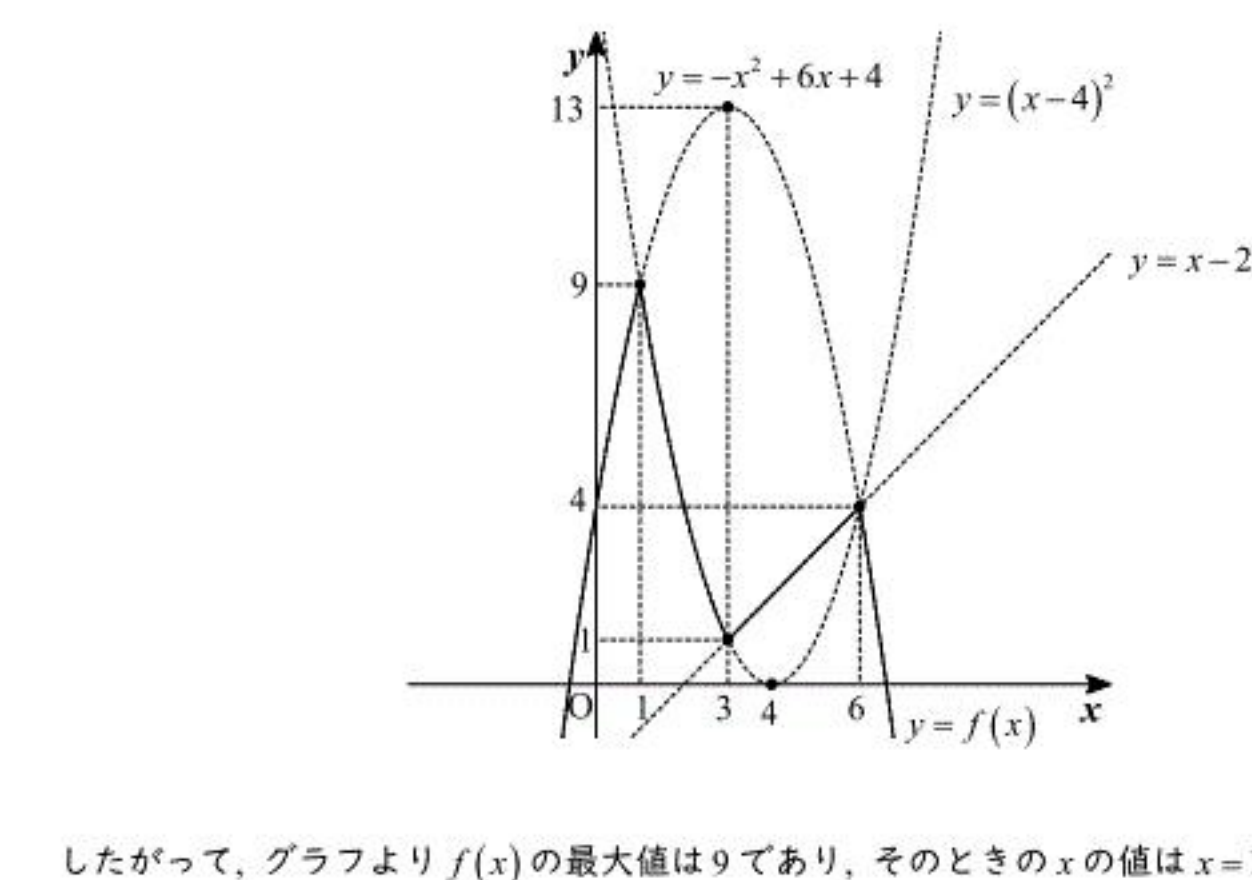
$x=-1$ である.

(b)

(a)の表より,

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x+4 & (x<1, 6\leq x \text{ のとき}) \\ (x-4)^2 & (1\leq x<3 \text{ のとき}) \\ x-2 & (3\leq x<6 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots \text{①}$$

が成り立つ. $-x^2+6x+4=-(x-3)^2+13$ より, $f(x)$ のグラフは以下の実線部分のようになる.



したがって, グラフより $f(x)$ の最大値は9であり, そのときの x の値は $x=1$ である.

(c)

$f(x)=k$ となる実数 x が4個となることは, $y=f(x)$ と $y=k$ のグラフが共有点を4つもつ

ことと同値である. したがって, (b)の図より, 求める k の範囲は $1< k < 4$ である.

(d)

$t\geq 10$ であるから, ①より,

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x)dx &= \int_0^1 (-x^2+6x+4)dx + \int_1^3 (x-4)^2 dx + \int_3^6 (x-2)dx + \int_6^t (-x^2+6x+4)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+4x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_1^3 + \left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_3^6 + \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+4x\right]_6^t \\ &= \left(\frac{20}{3}-0\right) + \left(-\frac{1}{3}+9\right) + \left(6+\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}t^3+3t^2+4t-60\right) \\ &= -\frac{1}{3}t^3+3t^2+4t-\frac{223}{6} \end{aligned}$$

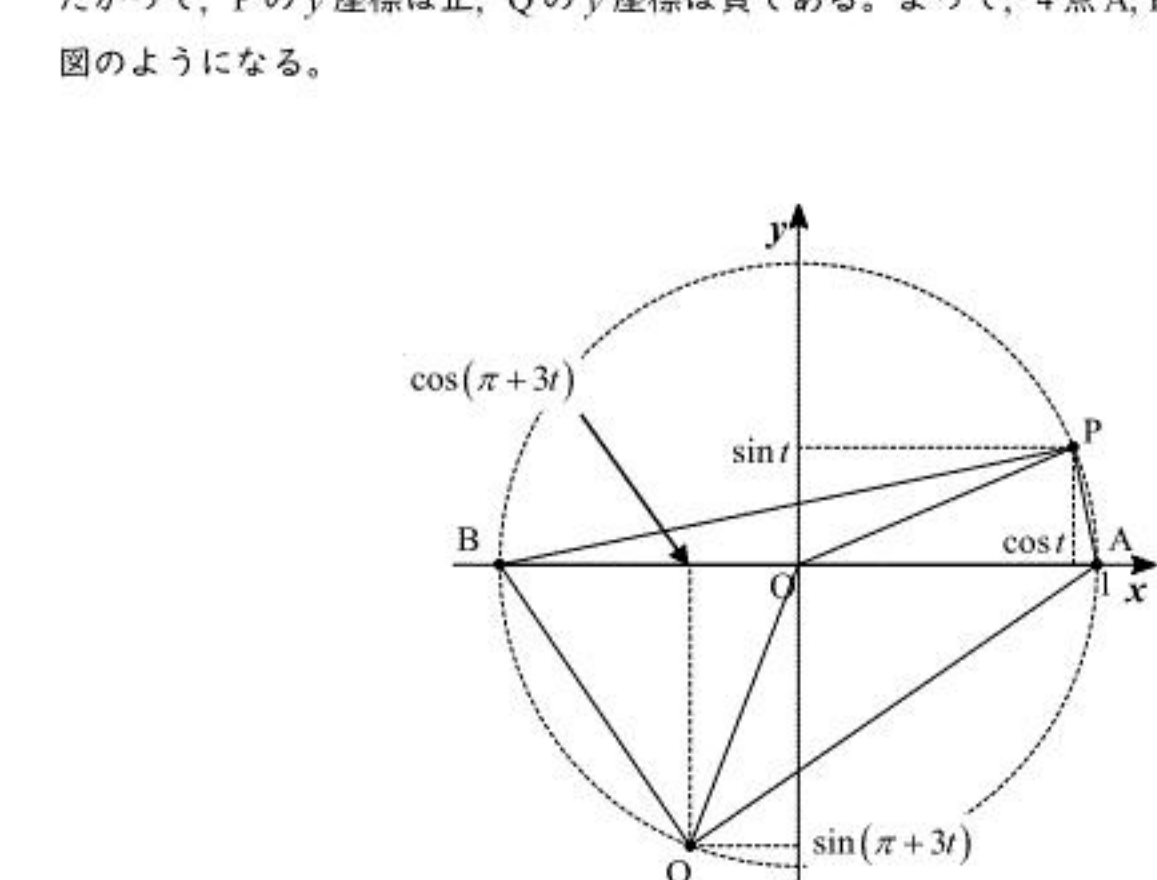
となる.

(2)(a)

$0< t < \frac{\pi}{3}$ より $\sin t > 0$ である. また, $0< t < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \pi < \pi+3t < 2\pi$ より $\sin(\pi+3t) < 0$ である. し

たがって, Pの y 座標は正, Qの y 座標は負である. よって, 4点A, B, P, Qを図示すると下

図のようになる.



図より, 三角形APBの面積は, 底辺をABとみれば,

$$\frac{1}{2} \cdot \{1-(-1)\} \cdot \sin t = \sin t$$

である. 同様に, 三角形ABQの面積は, 底辺をABとみれば,

$$\frac{1}{2} \cdot \{1-(-1)\} \cdot \{-\sin(\pi+3t)\} = -\sin(\pi+3t) = \sin 3t$$

である.

(b)

図より, $S(t)$ は, 三角形APBの面積と三角形ABQの面積の和に一致するため,

$$S(t) = \sin t + \sin 3t$$

である. よって, 3倍角の公式 $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ を用いて,

$$\begin{aligned} S'(t) &= \cos t + 3\cos 3t \\ &= \cos t + 3(4\cos^3 t - 3\cos t) \\ &= 12\cos^3 t - 8\cos t \\ \therefore S'(t) &= 4\cos t(3\cos^2 t - 2) \end{aligned}$$

が得られる.

(c)

$$\begin{aligned} S'(t) &= 4\cos t(3\cos^2 t - 2) \\ &= 12\cos t \left(\cos t + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \left(\cos t - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \end{aligned}$$

である. $0< t < \frac{\pi}{3}$ において $\cos t > 0$ であるから, $S'(t)$ の符号は $\cos t - \frac{\sqrt{6}}{3}$ の符号に一致する.

$0< t < \frac{\pi}{3}$ の範囲で $\cos t$ は単調減少であり, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{6}}{3} < 1 = \cos 0$ であるから,

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3} \right)$$

となる α がただ1つ存在する. $\cos t$ は単調減少であるから, $0< t < \alpha$ のとき $\cos t > \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\alpha < t < \frac{\pi}{3}$ のとき $\cos t < \frac{\sqrt{6}}{3}$ となる. したがって, $S(t)$ の増減表は次の通りである.

t	0	...	α	...	$\frac{\pi}{3}$
$\cos t - \frac{\sqrt{6}}{3}$	+	+	0	-	-
$S'(t)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$S(t)$	0	$\nearrow$	$S(\alpha)$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

ここで $\sin \alpha > 0$ より,

$$\sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

である. したがって, $S(t)$ の最大値は

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \sin \alpha + \sin 3\alpha \\ &= \sin \alpha + 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 \\ &= \frac{8}{9}\sqrt{3} \end{aligned}$$

であり, そのときの $\cos t$ の値は $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ である.

2

(1)

2 曲線 C_1, C_2 がちょうど 2 つの共有点を持つから、連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y = ax^2 \end{cases}$$

がちょうど 2 つの実数の組 (x, y) の解をもつ。 $a > 0$ より、

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y = ax^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{a} - y^2 = 1 \\ x^2 = \frac{y}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - \frac{y}{a} + 1 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 = \frac{y}{a} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。実数 y が定まったとき、 $\textcircled{2}$ をみたす実数 x は、 $y > 0$ のとき 2 個、 $y = 0$ のとき 1 個、 $y < 0$ のとき 0 個存在する。よって、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ をみたす実数の組 (x, y) がちょうど 2 つとなるためには、 y についての方程式 $\textcircled{1}$ が、正の解をちょうど 1 つもち、0 を解にもたない必要がある。よって、

$$y \text{ についての方程式 } \textcircled{1} \text{ が正の解をちょうど 1 つもつ} \quad \dots \textcircled{3}$$

ことになる。ここで、 $\textcircled{1}$ が 2 つの異なる実数解 α, β をもつとすると、解と係数の関係より $\alpha\beta = 1$ となる。よって、このとき 2 つの解は同符号となり、条件 $\textcircled{3}$ を満たすことはない。したがって、 $\textcircled{3}$ が成り立つのは、 $\textcircled{1}$ が正の重解をもつときのみである。このとき $\textcircled{1}$ の判別式が 0 であるから

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{a}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。このとき $\textcircled{1}$ は

$$\begin{aligned} y^2 - 2y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

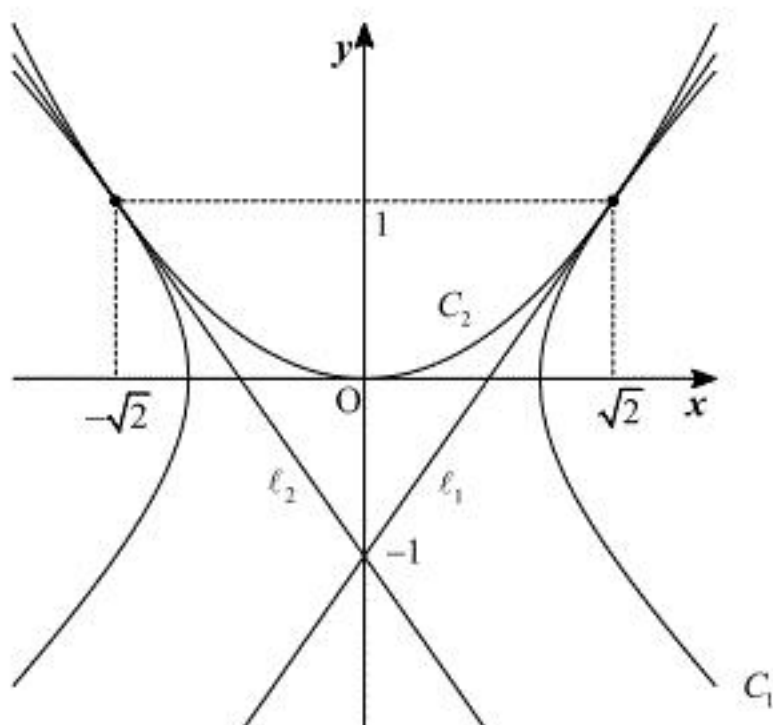
となるから、 $\textcircled{1}$ の解は $y = 1$ で、 $\textcircled{2}$ に代入して $x = \pm\sqrt{2}$ を得る。以上より、 $a = \frac{1}{2}$ であり、

$A(\sqrt{2}, 1), B(-\sqrt{2}, 1)$ である。

(答) a の値は $a = \frac{1}{2}$, $A(\sqrt{2}, 1), B(-\sqrt{2}, 1)$

(2)

2 曲線 C_1, C_2 を図示すると以下のようになる。



双曲線 C_1 の方程式の両辺を x で微分すると

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

である。

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

より、点 $A(\sqrt{2}, 1)$ における接線の傾きは $\sqrt{2}$ であり、接線 ℓ_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y - 1 &= \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ \therefore y &= \sqrt{2}x - 1 \end{aligned}$$

である。ここで、 $x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow (-x)^2 - y^2 = 1$ および $y = ax^2 \Leftrightarrow y = a(-x)^2$ より、 C_1, C_2 はともに y 軸に関して対称である。よって、直線 ℓ_1, ℓ_2 は y 軸に関して互いに対称な位置にあるから、 ℓ_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2} \cdot (-x) - 1 \\ \Leftrightarrow y &= -\sqrt{2}x - 1 \end{aligned}$$

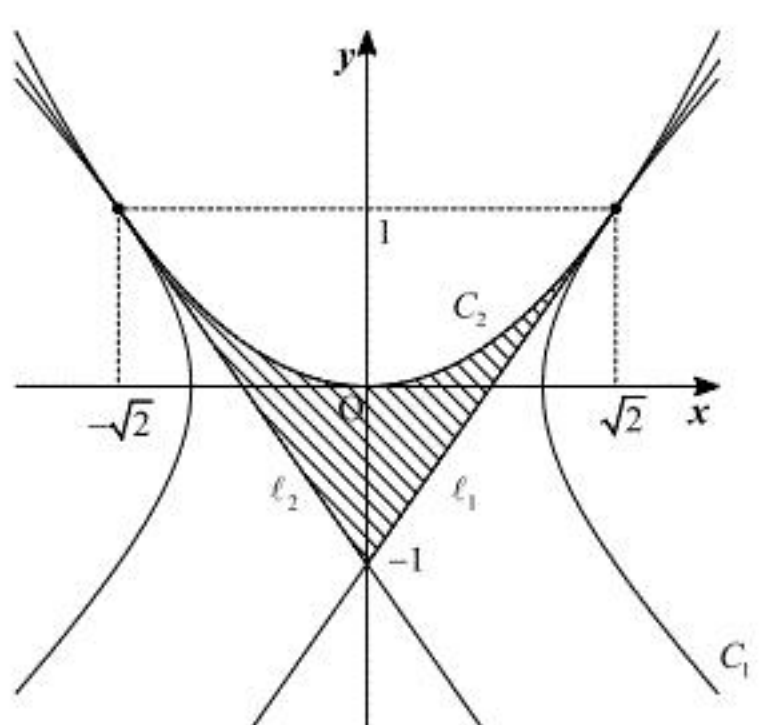
である。

(答) $\ell_1: y = \sqrt{2}x - 1, \ell_2: y = -\sqrt{2}x - 1$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= \sqrt{2}x - 1 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

より、2 次方程式 $\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{2}x - 1$ は重解を持つから、 ℓ_1 は C_2 に接する。同様に、 ℓ_2 も C_2 に接するから、領域 D は以下の斜線部の通りである。



y 軸に関する対称性より、 D の面積は

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2}x^2 - (\sqrt{2}x - 1) \right\} dx &= \int_0^{\sqrt{2}} (x - \sqrt{2})^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \sqrt{2})^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(4)

直線 ℓ_1, ℓ_2 および直線 $y = 1$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体を V_1 、放物線 C_2 および直線 $y = 1$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体を V_2 とすれば、求める立体の体積は V_1 の体積から V_2 の体積を除いたものに等しい。まず、 V_1 は底面が半径 $\sqrt{2}$ の円、高さが 2 の円錐に等しく、 V_1 の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi$$

である。次に、 V_2 の体積を求める。直線 $y = t$ ($0 < t < 1$) と放物線 C_2 との交点の x 座標は $x = \pm\sqrt{2t}$ であるから、 V_2 を平面 $y = t$ ($0 < t < 1$) で切断したときの断面は、半径 $\sqrt{2t}$ の円である。したがって、 V_2 の体積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi (\sqrt{2t})^2 dt &= \pi \left[t^2 \right]_0^1 \\ &= \pi \end{aligned}$$

である。以上より、求める体積は $\frac{4}{3}\pi - \pi = \frac{1}{3}\pi$ である。

(答) $\frac{1}{3}\pi$

(1)

$$f'(x) = \frac{2x(1+x+x^3) - x^2(1+3x^2)}{(1+x+x^3)^2}$$

$$= \frac{-x^4 + x^2 + 2x}{(1+x+x^3)^2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{-x^4 + x^2 + 2x}{(1+x+x^3)^2}$$

(2)

$$f'(x) = \frac{-x^4 + x^2 + 2x}{(1+x+x^3)^2} = \frac{x}{(1+x+x^3)^2} \cdot (-x^3 + x + 2)$$

である。 $x \geq 2$ において $\frac{x}{(1+x+x^3)^2} > 0$ であるから、 $f'(x)$ の符号は $-x^3 + x + 2$ の符号と一致

する。ここで、 $-x^3 + x + 2 = -x(x^2 - 1) + 2$ が成り立つ。 $x \geq 2$ において $x^2 - 1 \geq (-2)^2 - 1 = 3 (> 0)$

であるから、

$$x(x^2 - 1) \geq 2 \cdot 3 = 6$$

となる。よって、

$$-x^3 + x + 2 = -x(x^2 - 1) + 2 \leq -6 + 2 = -4 < 0$$

となる。以上より、 $f'(x) < 0$ を得る。

(3)

(2)より、 $x \geq 2$ のとき $f(x)$ は単調減少である。よって、 $n \geq 2$ のとき、 $n \leq x \leq n+1$ の範囲で

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

が成り立つ。これより、 $n \geq 2$ に対して

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$\Leftrightarrow f(n+1) \leq a_n \leq f(n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n+n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + 1}$$

$$= 0$$

である。また、 $m = n+1$ とおくと $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = 0$$

である。これらと①より、はさみうちの原理から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を得る。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(4)

①の各辺に n をかけて、 $n \geq 2$ に対して

$$nf(n+1) \leq na_n \leq nf(n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nf(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{1+n+n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + 1}$$

$$= 1$$

である。また、 $m = n+1$ とおくと $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nf(n+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} (m-1)f(m)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \{mf(m) - f(m)\}$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

である。これらと②より、はさみうちの原理から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$ を得る。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$$