

【解答】

(1)	ア	イ			
	1	2			
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ
	1	2	2	3	2
(3)	ク	ケ			
	4	2			
(4)	コ	サ	シ	ス	セ
	1	2	7	3	6

【解説】

$\{1,2,\dots,n\}$ の部分集合 A を、 0 と 1 からなる n 個の要素の集合 X に対応させることを考える。
すなわち $i (1 \leq i \leq n)$ が A に含まれるとき X の i 番目の要素は 1 である。このとき $c(n,k)$ は、
 1 の両隣に 0 が来ることがないような、 k 個の 1 と $n-k$ 個の 0 からなる集合 X の構成の仕方
の総数となる。

(1)

1 の両隣に 0 が来ることがないという条件から、 X の $i, i+1, i+2$ 番目の要素が 1 となればよく、
 i の取りうる値の範囲は $1 \leq i \leq n-2$ であるから、 $c(n,3)=n-2$ となる。

(2)

n 個の要素のうち $n-1$ 個が 1 であるような X の構成の仕方は n 通りある。このうち条件を満たさないのは、
 X の 2 番目または $n-1$ 番目の要素が 0 となるときであるから、
 $c(n,n-1)=n-2$ となる。

次に $c(n,4)$ について考える。条件を満たす X の構成の仕方は以下の場合に分けられる。

- [1] 4 つの 1 がとなりあう場合
- [2] 2 つの 1 のみがとなりあう箇所が 2 箇所ある場合

[1]の場合

$i, i+1, i+2, i+3$ 番目の要素が 1 となればよく、 i の取りうる値の範囲は $1 \leq i \leq n-3$ であるから、
 $n-3$ 通りある。

[2]の場合

まず $n-4$ 個の 0 を一列に並べ、その間および両端の $n-3$ 箇所から 2 つの 1 が入る箇所を
 2 箇所選べばよいので、 ${}_{n-3}C_2 = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$ 通りある。

以上[1],[2]より、 $c(n,4)=(n-3)+\frac{(n-3)(n-4)}{2}=\frac{1}{2}(n-3)(n-2)$ となる。

(3)

$c(n,5)$ について条件を満たす X の構成の仕方は以下の場合に分けられる。

- [1] 5 つの 1 がとなりあう場合
- [2] 2 つの 1 がとなりあう箇所が 1 箇所あり、 3 つの 1 がとなりあう箇所が 1 箇所ある場合

[1]のとき

X の $i, i+1, i+2, i+3, i+4$ 番目の要素が 1 であればよく、 i の取りうる値の範囲は、
 $1 \leq i \leq n-4$ であるから、 $n-4$ 通りある。

[2]のとき

まず $n-5$ 個の 0 を並べ、その間および両端の $n-4$ 箇所の間に 2 つの 1 と 3 つの 1 を入れる
 2 箇所を選べばよく、 2 つの 1 と 3 つの 1 が区別できるため、 ${}_{n-4}C_2 \cdot 2=(n-4)(n-5)$ 通りある。

以上[1],[2]より $c(n,5)=n-4+(n-4)(n-5)=(n-4)^2$ となる。

(4)

集合 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ の部分集合の個数は、各々の要素が含まれるか否かの 2 通りの選択があるから、
 $2^7=128$ 通り。空集合を除けば $128-1=127$ 通りある。

またこのうち条件(C)を満たすものの個数は $\sum_{k=2}^7 c(7,k)$ と表せる。 $c(7,2)$ について、 X の
 $i, i+1$ 番目が 1 であればよく、 i の取りうる値の範囲は $1 \leq i \leq 6$ であるから $c(7,2)=6$ となる。
したがって、(1)～(3)より、求める場合の数は、

$$6+(7-2)+\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5+(7-4)^2+7-2+1=36 \text{ 通り}$$

となる。

2

(1)

まず点 A の x 座標を求める。 $x^2+(y+1)^2=1$ と $y=-t$ を連立して、

$$\begin{aligned}x^2+(-t+1)^2&=1 \\ \Leftrightarrow x^2&=2t-t^2\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq t \leq 2$ より、 $2t-t^2 \geq 0$ であるから、 x は実数解を持つため、 $x \geq 0$ に注意すると $A(\sqrt{2t-t^2}, -t)$ となる。一方 B について、 x 座標は A の x 座標と等しく、 $y=x$ 上にあるから $B(\sqrt{2t-t^2}, \sqrt{2t-t^2})$ となる。したがって線分 AB の中点 P の座標は、

$$P\left(\sqrt{2t-t^2}, \frac{1}{2}(-t+\sqrt{2t-t^2})\right) \text{ となる。}$$

(答) $P\left(\sqrt{2t-t^2}, \frac{1}{2}(-t+\sqrt{2t-t^2})\right)$

(2)

点 P の x 座標は点 A の x 座標に等しいから、 t が $0 \leq t \leq 2$ を動いた時の点 A の x 座標が動く範囲を調べればよい。点 A は $x^2+(y+1)^2=1$ の $x \geq 0$ の部分をくまなく動くので、求める x 座標の動く範囲は $0 \leq x \leq 1$ である。

(答) $0 \leq x \leq 1$

(3)

$2t-t^2=-(t-1)^2+1$ であるため、 $1 \leq t \leq 2$ のとき、A, B の y 座標はともに単調に減少する。そこで、まず t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動いた時の $f(t)=\frac{1}{2}(-t+\sqrt{2t-t^2})$ の増減を調べる。 $f'(t)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}} \right) \\ &= \frac{1-t-\sqrt{2t-t^2}}{2\sqrt{2t-t^2}} \\ &= \frac{(1-t)^2-(2t-t^2)}{2\sqrt{2t-t^2}(1-t+\sqrt{-(1-t)^2+1})} \\ &= \frac{2t^2-4t+1}{2\sqrt{2t-t^2}(1-t+\sqrt{-(1-t)^2+1})} \\ &= \frac{\left(t-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)}{4\sqrt{2t-t^2}(1-t+\sqrt{-(1-t)^2+1})}\end{aligned}$$

となる。よって、これと先ほどの $1 \leq t \leq 2$ で P の y 座標が単調減少であることとを合わせれば、 $f(t)$ の $0 \leq t \leq 2$ における増減表は以下のようになる。

t	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		2
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	↗	極大	↘	-1

$f'(t)=0$ のとき $1-t=\sqrt{2t-t^2}$ であるから、

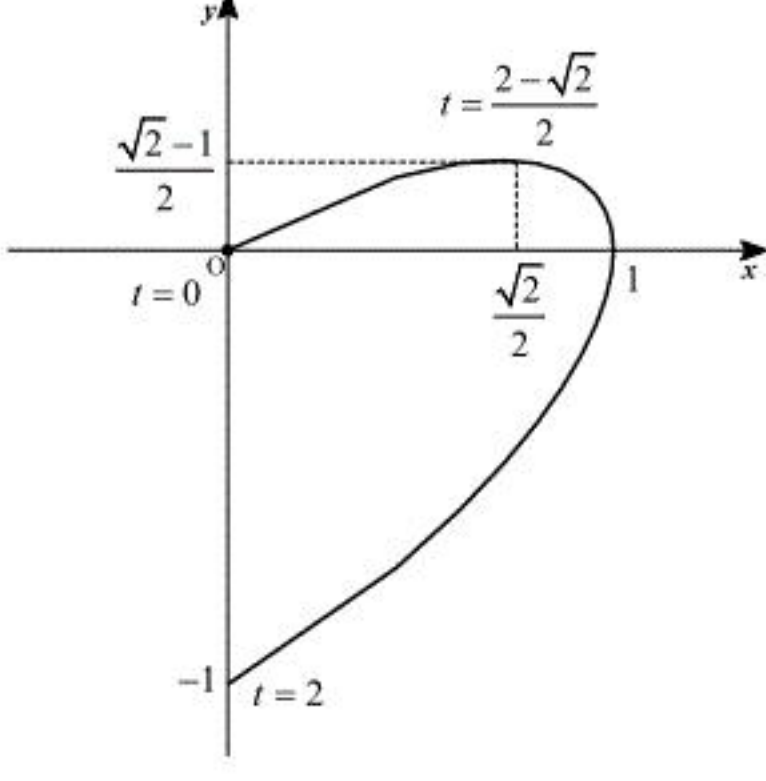
$$\begin{aligned}f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{1}{2}(-t+1-t) \Big|_{t=\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって求める P の y 座標の動く範囲は $-1 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ となる。

(答) $-1 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

(4)

増減表より、P の x 座標は、A の x 座標と等しいから P の x 座標は $0 \leq t \leq 1$ で単調に増加し、 $1 \leq t \leq 2$ で単調に減少する。また P の y 座標の挙動については(3)で議論した通りであるから、C の概形は以下のようになる。



ここで C の $0 \leq t \leq \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ に対応する部分を $x=x_1(y)$ 、 $\frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 2$ に対応する部分を $x=x_2(y)$ とする。求める面積はを S とすると、

$$\begin{aligned}S &= \int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} x_2(y) dy - \int_0^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} x_1(y) dy \\ &= \int_2^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} x(t) \frac{dy}{dt} dt - \int_0^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} x(t) \frac{dy}{dt} dt \\ &= \int_2^0 x(t) \frac{dy}{dt} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_2^0 (-\sqrt{2t-t^2} + 1 - t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{2t-t^2} dt + \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} t^2 \right]_2^0 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{-(t-1)^2 + 1} dt\end{aligned}$$

となる。ここで $t-1=\sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと、 $dt=\cos \theta d\theta$ であり、 t と θ の対応関係は以下のようになる。

t	0	→	2
θ	$-\frac{\pi}{2}$	→	$\frac{\pi}{2}$

したがって、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\sin^2 \theta + 1} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。なお 2 行目から 3 行目の変形では、偶関数の性質を用いた。

(答) $\frac{\pi}{4}$

(5)

回転体の体積を V とすると、(4)の $x_1(y), x_2(y)$ を用いて、

$$\begin{aligned}V &= \int_1^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \pi \{x_1(y)\}^2 dy - \int_0^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \pi \{x_2(y)\}^2 dy \\ &= \int_2^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \pi \{x(t)\}^2 \frac{dy}{dt} dt - \int_0^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \pi \{x(t)\}^2 \frac{dy}{dt} dt \\ &= \int_2^0 \pi \{x(t)\}^2 \frac{dy}{dt} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_2^0 (2t-t^2) \left(-1 + \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_2^0 \left\{ -2t+t^2 + (1-t)\sqrt{2t-t^2} \right\} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-t^2 + \frac{1}{3} t^3 + (2t-t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right]_2^0 \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} \pi\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3} \pi$