

【解答】

	【あ】	【い】
(1)	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{4}$
	【う】	【え】
(2)	3	$\frac{1}{5}$
	【お】	【か】
(3)	$\frac{87}{5}$	$\frac{22}{9}$

(3)

$mx+y=l$ とおくと、直線 $y=-mx+l$ は、傾き $-m$ 、 y 切片 l の直線を表すから、この直線 $y=-mx+l$ が領域 D と共有点をもつような l の値の最大値および最小値を考えればよい。ここで、 $0 < m \leq 3$ のとき、 l が最大となるのは直線 $y=-mx+l$ が点 $(0, 3)$ を通るときであり、このとき、最大値は、

$$l = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

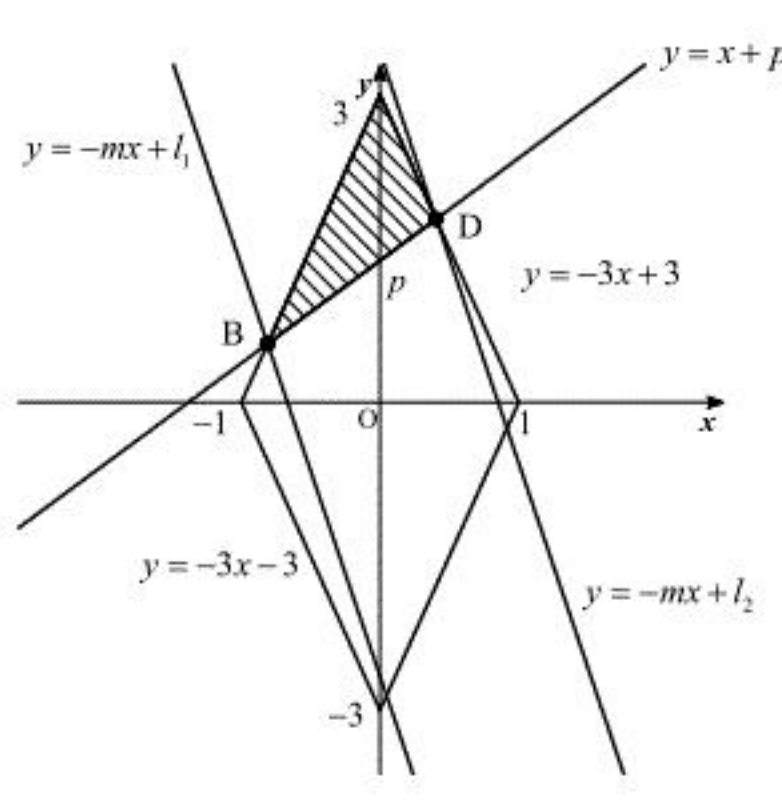
であるが、これは条件に反するから不適である。よって、 $m > 3$ の場合のみを考える。ここで、 $p \leq 1$ であるとする、領域 D には点 $(-1, 0)$ が含まれるため、 l を最小にするような直線

$y=-mx+l$ は、点 $(-1, 0)$ を通ることになる。このとき、 l の最小値が $-\frac{8}{3}$ であることから、

$$0 = -m \cdot (-1) - \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{8}{3}$$

となるが、これは $m > 3$ であるという条件を満たさない。したがって、以下では $m > 3$ かつ $p > 1$ の場合を考える。この条件の下で、直線 $y=x+p$ は、 $-1 < x < 0$ の範囲で直線 $y=3x+3$ と交わり、 $0 < x < 1$ の範囲で直線 $y=-3x+3$ と交わる。これらの交点を B, D とおいて、このとき領域 D と直線の関係を以下に示す。



上図より、 l の最小値を l_1 とおくと直線 $y=-mx+l_1$ は点 $B\left(\frac{p-3}{2}, \frac{3p-3}{2}\right)$ を通る。よって、こ

のとき最小値が $-\frac{8}{3}$ となるような m, p の値は、

$$l_1 = -\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \frac{p-3}{2} + \frac{3p-3}{2} = -\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow -3m + mp + 3p + \frac{7}{3} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。また、 l の最大値を l_2 とおくと直線 $y=-mx+l_2$ は点 $D\left(-\frac{p-3}{4}, \frac{3p+3}{4}\right)$ を通る。よ

って、このとき最大値が 5 となるような m, p の値は、

$$l_2 = 5$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \left(-\frac{p-3}{4}\right) + \frac{3p+3}{4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 3m - mp + 3p - 17 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。①+②より、

$$6p + \frac{7}{3} - 17 = 0$$

$$\therefore p = \frac{22}{9}$$

であり、 $m = \frac{87}{5}$ である。これは $m > 3$ かつ $p > 1$ を満たしている。以上より、求める m, p の値

は、

$$m = \frac{87}{5}, p = \frac{22}{9}$$

である。

【解説】

(1)

不等式 $3|x|+|y| \leq 3$ について、

$$|y| \leq 3-3|x|$$

と変形すると、左辺は $|y| \geq 0$ であるから、

$$0 \leq 3-3|x| \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

が成り立つ。また、

$$|y| \leq 3-3|x|$$

$$\Leftrightarrow 3|x|-3 \leq y \leq -3|x|+3$$

と変形できるから、

$$3|x|+|y| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-3 \leq y \leq 3x+3 & (-1 \leq x < 0) \\ 3x-3 \leq y \leq -3x+3 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となる。直線 $y=\pm 3x\pm 3$ (複号任意) と直線 $y=x+p$ の交点を以下のように A, B, C, D とすると

その座標は、上式における x の範囲に注意して、

$$y=-3x-3 \text{ のとき, } A\left(-\frac{p+3}{4}, \frac{3p-3}{4}\right) \quad (-3 < p < 1)$$

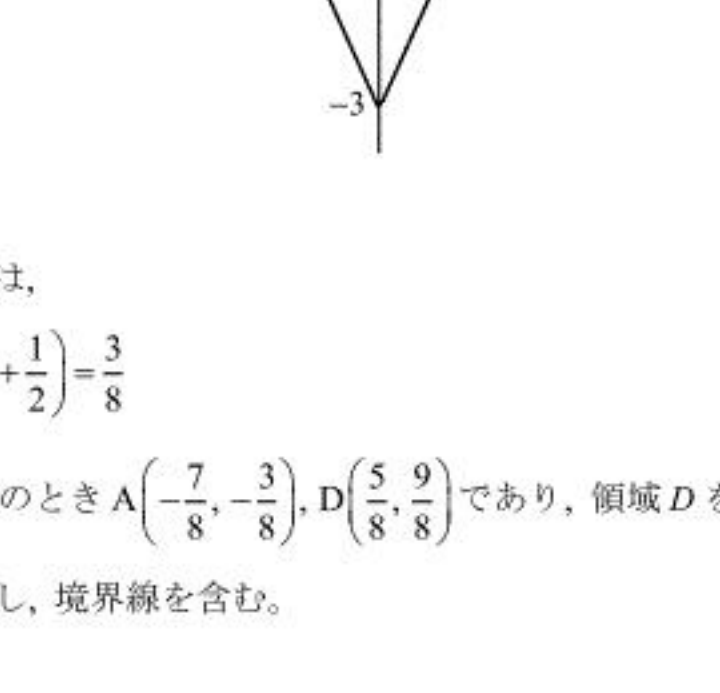
$$y=3x+3 \text{ のとき, } B\left(\frac{p-3}{2}, \frac{3p-3}{2}\right) \quad (1 \leq p < 3)$$

$$y=3x-3 \text{ のとき, } C\left(\frac{p+3}{2}, \frac{3p+3}{2}\right) \quad (-3 < p < -1)$$

$$y=-3x+3 \text{ のとき, } D\left(-\frac{p-3}{4}, \frac{3p+3}{4}\right) \quad (-1 \leq p < 3)$$

となる。ここで、 $p=2$ のとき $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), D\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$ であり、領域 D を図示すると以下の斜線部

部ようになる。ただし、境界線を含む。

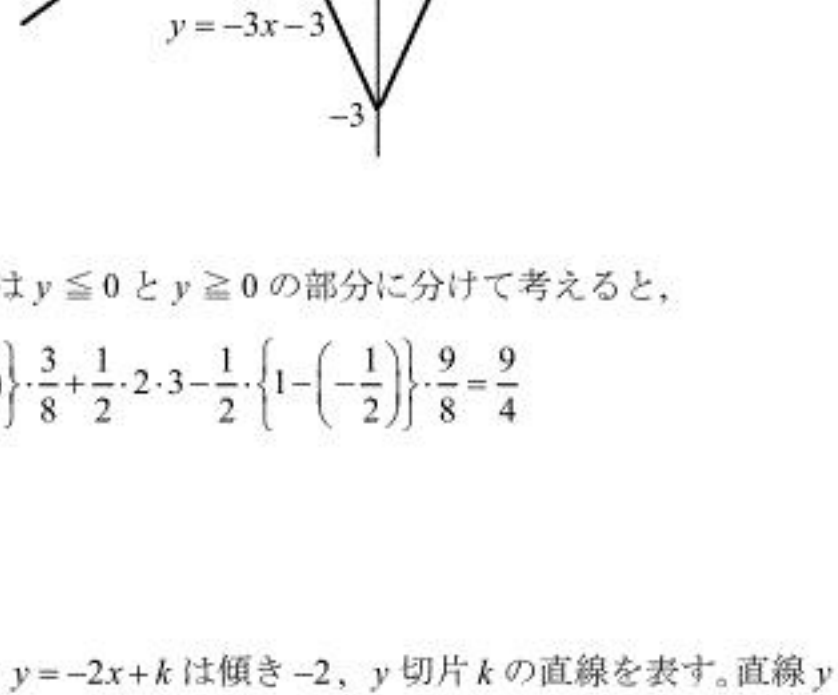


上図より、 D の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot (3-2) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

である。また、 $p=\frac{1}{2}$ のとき $A\left(-\frac{7}{8}, -\frac{3}{8}\right), D\left(\frac{5}{8}, \frac{9}{8}\right)$ であり、領域 D を図示すると以下の斜線部

部ようになる。ただし、境界線を含む。



上図より、 D の面積は $y \leq 0$ と $y \geq 0$ の部分に分けて考えると、

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{-\frac{1}{2} - (-1)\right\} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$$

である。

(2)

$2x+y=k$ とおくと、 $y=-2x+k$ は傾き -2 、 y 切片 k の直線を表す。直線 $y=-2x+k$ が領域 D

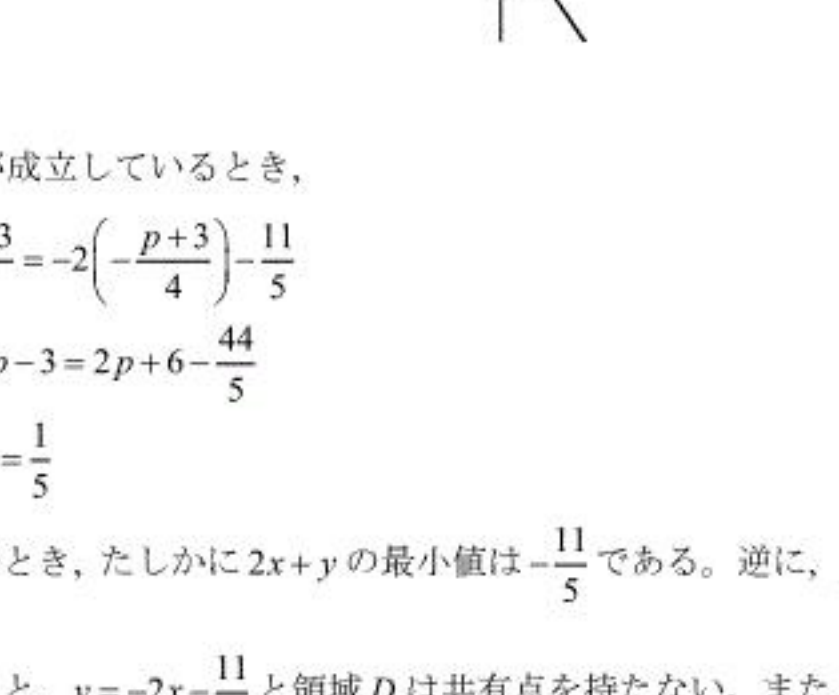
と共有点をもつような k の値を考えればよい。直線 $y=-2x+k$ の傾きの大きさは 3 よりも小

さいから、 k が最大となると、直線 $y=-2x+k$ は点 $(0, 3)$ を通る。よって、最大値は、

$$k = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

である。また、 $2x+y$ の最小値が $-\frac{11}{5}$ であるとき、 $y=-2x-\frac{11}{5}$ と領域 D は共有点を持つ。こ

こで、 $y=-2x-\frac{11}{5}$ と $y=x+p$ と $y=-3x-3$ が 1 点で交わる場合の関係を以下に示す。



上図の関係が成立しているとき、

$$\frac{3p-3}{4} = -2\left(-\frac{p+3}{4}\right) - \frac{11}{5}$$

$$\Leftrightarrow 3p-3 = 2p+6 - \frac{44}{5}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{5}$$

である。このとき、たしかに $2x+y$ の最小値は $-\frac{11}{5}$ である。逆に、 $p > \frac{1}{5}$ であるとき、上図を

用いて考えると、 $y=-2x-\frac{11}{5}$ と領域 D は共有点を持たない。また、 $p < \frac{1}{5}$ であるとき、

$y=-2x+k$ が $A\left(-\frac{p+3}{4}, \frac{3p-3}{4}\right)$ を通るとき k の値が $2x+y$ の最小値となるが、このとき、

$$k = 2 \cdot \left(-\frac{p+3}{4}\right) + \frac{3p-3}{4} = \frac{1}{4}p - \frac{9}{4} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{9}{4} = -\frac{11}{5}$$

より、 $k < -\frac{11}{5}$ であるから条件を満たさない。したがって、 $2x+y$ の最小値が $-\frac{11}{5}$ であること

と、 $p = \frac{1}{5}$ であることは、必要十分であるから、求める p の値は $\frac{1}{5}$ である。

【解答】

	$\boxed{\text{あ}}$	$\boxed{\text{い}}$	$\boxed{\text{う}}$		
(1)	$\frac{2n^2}{4n^2+1}\left(e^{\frac{\pi}{2n}}+1\right)$	$-\frac{n}{4n^2+1}\left(e^{\frac{\pi}{2n}}+1\right)$	$-\frac{1}{2}$		
	$\boxed{\text{え}}$	$\boxed{\text{お}}$	$\boxed{\text{か}}$	$\boxed{\text{き}}$	$\boxed{\text{く}}$
(2)	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{1}{2n+1}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{\pi}{2}$

(く)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $0 \leq \sin x \leq 1$ かつ $0 \leq \cos x \leq 1$ であることから、

$$0 \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x \leq \sin^{n-1} x$$

$$0 \leq \cos^{n+1} x \leq \cos^n x \leq \cos^{n-1} x$$

である。したがって、

$$0 \leq C_{n+1} \leq C_n \leq C_{n-1}$$

$$0 \leq D_{n+1} \leq D_n \leq D_{n-1}$$

である。これより、

$$nC_n D_{n+1} \leq nC_n D_n \leq nC_n D_{n-1}$$

$$nC_{n+1} D_n \leq nC_n D_n \leq nC_{n-1} D_n$$

が成り立つ。 $n=2m$ (m は自然数)のとき、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} nC_n D_{n+1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} 2mC_{2m} D_{2m+1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m}{2m+1} C_0 D_1 \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{2+\frac{1}{m}} C_0 D_1 \\ &= C_0 D_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} nC_n D_{n-1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} 2mC_{2m} D_{2m-1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m}{2m} C_0 D_1 \\ &= C_0 D_1\end{aligned}$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nC_n D_n = C_0 D_1$$

である。また、 $n=2m-1$ (m は自然数)のとき、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} nC_{n+1} D_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} (2m-1)C_{2m} D_{2m-1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m-1}{2m} C_0 D_1 \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{m}}{2} C_0 D_1 \\ &= C_0 D_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} nC_{n-1} D_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} (2m-1)C_{2m-2} D_{2m-1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m-1}{2m-1} C_0 D_1 \\ &= C_0 D_1\end{aligned}$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nC_n D_n = C_0 D_1$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}C_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nC_n D_n = \frac{\pi}{2}$ である。

$$(\text{答}) \lim_{n \rightarrow \infty} nC_n D_n = \frac{\pi}{2}$$

【解説】

(1)

$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^n \sin 2x dx$, $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^n \cos 2x dx$ に対してそれぞれ部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}A_n &= \left[-\frac{1}{2} e^n \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^n \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right) + \frac{1}{2n} B_n \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n &= \left[\frac{1}{2} e^n \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^n \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{2n} A_n \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が得られる。①, ②より、

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right) - \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} A_n \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4n^2+1}{4n^2} \right) A_n &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right) \\ \Leftrightarrow A_n &= \frac{2n^2}{4n^2+1} \left(e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right) \\ B_n &= -\frac{1}{2n} A_n = -\frac{n}{4n^2+1} \left(e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right)\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} nA_n B_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^4 \left(e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right)^2}{\left(4n^2 + 1 \right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \left(e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right)^2}{\left(4 + \frac{1}{n^2} \right)^2} \\ &= \frac{-2^3}{4^2} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(2)

$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ であることから、部分積分を用いると、

$$\begin{aligned}C_n &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ -(n-1) \cos^2 x \sin^{n-2} x \} dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \} dx \\ &= (n-1) (C_{n-2} - C_n) \\ \Leftrightarrow nC_n &= (n-1) C_{n-2} \\ \Leftrightarrow C_n &= \frac{n-1}{n} C_{n-2} \\ D_n &= \left[\sin x \cos^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ -(n-1) \sin^2 x \cos^{n-2} x \} dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \} dx \\ &= (n-1) (D_{n-2} - D_n) \\ \Leftrightarrow nD_n &= (n-1) D_{n-2} \\ \Leftrightarrow D_n &= \frac{n-1}{n} D_{n-2}\end{aligned}$$

が得られる。また、 $C_n = \frac{n-1}{n} C_{n-2}$ より、

$$C_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot C_0$$

となり、同様にして、

$$\begin{aligned}D_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot D_1 \\ D_{2n-1} &= \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot D_1\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}C_{2n} D_{2n+1} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot C_0 \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot D_1 \\ &= \frac{1}{2n+1} C_0 D_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{2n} D_{2n-1} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot C_0 \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot D_1 \\ &= \frac{1}{2n} C_0 D_1\end{aligned}$$

である。