

J 1

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 12 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

以下の問題 1 2 3 4 において、 内のカタカナの1文字にあてはまる 0 から 9 までの数字を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数で表しなさい。また、根号内の に対しては、根号内に現れる正の整数が最小となる形で答えなさい。なお、ア のようなカタカナ1文字は1桁の数を表し、アイ のようなカタカナ2文字は2桁の数、アイウ のようなカタカナ3文字は3桁の数を表すものとします。

1 (12点)

関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{7} \sin x + \frac{1}{7} \cos x + 1, \quad g(x) = 3^{-\frac{7}{2}x}$$

と定める。

(1) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

(2) $g(\log_3 5) = \frac{\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エオカ}}$ である。ここで、 $\log_3$ は 3 を底とする対数関数を表す。

(3) x がすべての実数値を動くとき、 f と g の合成関数 $(g \circ f)(x)$ のとり得る値の範囲は、

$$\frac{\sqrt{\text{キ}}}{\text{クケコ}} \leq (g \circ f)(x) \leq \frac{\sqrt{\text{サ}}}{\text{シス}}$$

である。

(下書き用紙)

2 (12 点)

平面上に、 $OA \parallel CB$ 、 $OC \parallel AB$ である平行四辺形 $OABC$ を考える。辺 AB を $2:3$ に内分する点を D 、辺 CB を $1:4$ に外分する点を E とする。

(1) $\overrightarrow{DE} = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \overrightarrow{OC}$ である。

(2) 線分 DE と 線分 OB の交点を F とすると、

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}} \overrightarrow{OC}$$

である。

(3) 2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ のなす角を θ とする。辺 OA の長さが $\sqrt{3}$ 、辺 OC の長さが 2 であるとき、線分 DE と線分 OB が直交するのは、

$$\cos \theta = -\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

のときである。

(下書き用紙)

3 (18 点)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n^4} \int_1^{e^n} \frac{(\log x)^3}{x} \left(1 - \frac{\log x}{n}\right)^{n+3} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

と定める。ここで、 e は $e = \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}$ によって定まる実数とし、 $\log$ は自然対数とする。

(1) $a_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウエ}}}$ である。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n + \boxed{\text{オ}}} - \frac{\boxed{\text{カ}}}{n + \boxed{\text{キ}}} + \frac{\boxed{\text{ク}}}{n + \boxed{\text{ケ}}} - \frac{1}{n + \boxed{\text{コ}}} \\ &= \frac{\boxed{\text{サ}}}{(n + \boxed{\text{オ}})(n + \boxed{\text{キ}})(n + \boxed{\text{ケ}})(n + \boxed{\text{コ}})} \end{aligned}$$

と書ける。(上の記述において $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ は既出の $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ を表している。)

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ となる。

(下書き用紙)

4

(18 点)

複素数平面上で、複素数 $-2+3i$ の表す点を A、実数 3 の表す点を B とする。さらに、 z を $|z-1|=3$ を満たす複素数とし、複素数平面上で z が表す点を P とする。ここで、 i は虚数単位を表す。

(1) 複素数平面上の 2 点 A, B 間の距離は $\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。

(2) 複素数平面上で、3 点 A, B, P が一直線上にあるときの複素数 z は、

$$\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}} - \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}} \sqrt{\boxed{\text{サシ}}} + \left(\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}} + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}} \sqrt{\boxed{\text{トナ}}} \right) i,$$

$$\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}} + \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}} \sqrt{\boxed{\text{サシ}}} + \left(\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}} - \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}} \sqrt{\boxed{\text{トナ}}} \right) i$$

の 2 つである。(上の記述において $\boxed{\text{ウエ}} \sim \boxed{\text{トナ}}$ は既出の $\boxed{\text{ウエ}} \sim \boxed{\text{トナ}}$ を表している。)

(3) 複素数 z が、(2) の場合を除いて、 $|z-1|=3$ を満たすすべての複素数を動くとき、複素数平面上にできる $\triangle ABP$ の面積の最大値は、

$$\boxed{\text{ニ}} + \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} \sqrt{\boxed{\text{ノハ}}}$$

である。その最大値を与える z の値は、

$$\boxed{\text{ヒ}} - \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}} \sqrt{\boxed{\text{マミ}}} - \frac{\boxed{\text{ムメ}}}{\boxed{\text{モヤ}}} \sqrt{\boxed{\text{ユヨ}}} i$$

である。

(下書き用紙)

問題 **5** の解答は解答用紙に記入しなさい。解答は答のみではなく、途中の過程も記述すること。

5 (40 点)

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4x+29}$$

と定める。以下の設問に答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ を微分し、その導関数 $f'(x)$ を既約分数式の形に書き表せ。
- (2) $-10 \leq x \leq 20$ のとき、関数 $f(x)$ の最大値とそのときの x の値、最小値とそのときの x の値を求めよ。
- (3) 座標平面上で、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{1}{5}$ は2つの交点をもつ。それらの交点の x 座標を求めよ。
- (4) 座標平面上で、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{1}{5}$ によって囲まれた図形の面積を求めよ。

