

D 1

数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより13ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したものと及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ロ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、エ などは既出の エ を表す。

(40 点)

(1) $0 \leq t \leq 2\pi$ として

$$x = 1 + \cos t, \quad y = -1 + 2\sqrt{2} \sin t$$

と媒介変数表示される曲線 C の方程式は

$$(x - \text{ア})^2 + \frac{(y + \text{イ})^2}{\text{ウ}} = 1$$

である。実数 k に対して直線 $y = x + k$ が C と接するような k の値は 2 つあり、小さい方が $-\text{エ}$ 、もう一方が オ である。 $k = -\text{エ}$ のときの接点の座標は $\left(\frac{\text{カ}}{\text{キ}}, -\frac{\text{クケ}}{\text{コ}} \right)$ 、 $k = \text{オ}$ のときの接点の座標は $\left(\frac{\text{サ}}{\text{シ}}, \frac{\text{ス}}{\text{セ}} \right)$ である。

(下書き用紙)

(2) a, b を実数とし,

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + 1 - a^2$$

とおく。

(a) 整式 $f(x)$ が $x-2$ で割り切れるような実数の組 (a, b) のうち b の値が最小

になるのは, $(a, b) = \left(\boxed{\text{ソ}}, -\frac{\boxed{\text{タ}}\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \right)$ のときである。

このとき, 偶関数の性質と部分積分法を用いることにより

$$\int_{-1}^1 x^2 e^{|x|} dx = \boxed{\text{テ}} \int_0^1 x^2 e^x dx = \boxed{\text{ト}} e - \boxed{\text{ナ}} \int_0^1 x e^x dx = \boxed{\text{ニ}} e - \boxed{\text{ヌ}}$$

となるので

$$\int_{-1}^1 f(x) e^{|x|} dx = -\boxed{\text{ネ}}\boxed{\text{ノ}} e - \boxed{\text{ハ}}$$

となる。ここで e は自然対数の底を表す。

(b) 数列 $\{x_n\}$ は $x_1 = 1$ で, $n = 2, 3, 4, \dots$ のとき

$$x_n = \begin{cases} \frac{f'(x_{n-1})}{x_{n-1}} & (x_{n-1} \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x_{n-1} = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たすとする。

$x_2 = 2, x_3 = 5$ となるのは $(a, b) = \left(-\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}, \boxed{\text{ヘ}} \right)$ のときであり, この

とき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n} = \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$ である。また $x_2 = 2, x_3 = 0$ となるのは $(a, b) =$

$\left(-\frac{\boxed{\text{ミ}}\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}}, \boxed{\text{モ}}\boxed{\text{ヤ}} \right)$ のときであり, このとき $\sum_{n=1}^{31} x_n = \boxed{\text{ユ}}\boxed{\text{ヨ}}$ であ

る。ただし, $f'(x)$ で関数 $f(x)$ の導関数を表す。

(下書き用紙)

(3) p が素数のとき p^5 は正の約数をちょうど $\boxed{\text{ラ}}$ 個もつ。

次の条件 (*) を考える。

(*) : 正の約数をちょうど $\boxed{\text{ラ}}$ 個もつ

条件 (*) を満たす最小の自然数は $\boxed{\text{リ}}\boxed{\text{ル}}$ であり、条件 (*) を満たす正の奇数のうち 2 番目に小さいのは $\boxed{\text{レ}}\boxed{\text{ロ}}$ である。

(下書き用紙)

問題

2

の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2

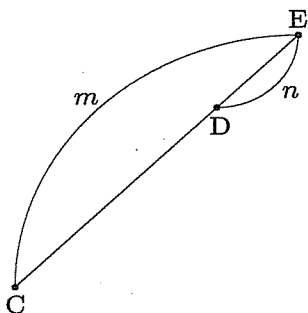
O を原点とする座標平面上の三角形 OAB を考える。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。

$0 < s < 1$, $0 < t < 1$, $u > 0$ を満たす s, t, u に対して,

辺 OA を $s : (1-s)$ に内分する点を M , 辺 OB を $t : (1-t)$ に内分する点を N ,

線分 AN を $(1+u) : u$ に外分する点を P , 線分 BM を $(1+u) : u$ に外分する点を Q

とおく。ただし, $m > n > 0$ を満たす m, n に対して, 線分 CD を $m : n$ に外分する点 E とは下図のような点である。



(1) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, s, t, u$ を用いて表せ。

(2) 3点 O, P, Q が同一直線上にあるとする。 u を s, t を用いて表せ。

以下 $A(1, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 < \theta < \pi$), $s = \frac{4}{9}$, $t = \frac{1}{9}$ とし, 3点 O, P, Q が同一直線上にあるとする。 k を実数とし, 直線 $y = x + k$ が点 P を通るとする。

(3) k を θ を用いて表せ。

(4) θ が $0 < \theta < \pi$ を動くとき, k のとる値の範囲を求めよ。

(30 点)

(下書き用紙)

問題

3

の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^{-2} \quad (x > 0)$$

で定める。O を原点とする座標平面上で曲線 $y = f(x)$ を C とおく。 $t > 0$ とし、点 $P(t, f(t))$ における C の法線を ℓ とし、 ℓ と x 軸の交点を $Q(q, 0)$ とおく。

(1) ℓ の方程式および q を t を用いて表せ。

$q = 0$ となるような t の値を t_1 とおく。

(2) t_1 を求めよ。

2 点 $R(0, 1)$, $S(1, 1)$ をとり、 $t > t_1$ とする。曲線 C と線分 PQ , QO , OR , RS で囲まれた部分の面積を $A(t)$ とおく。

(3) $A(t)$ を求めよ。

(4) 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ を求めよ。

(30 点)

(下書き用紙)

