

K 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 11 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

問題 1 ~ 4 の各文章中の ア, イ, ウ, ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。根号の中に入る数は、4 でも 9 でも割り切れないものとします。なお、ア は既出の ア を表します。

1

- (1) $x = 18^\circ$ とするとき、 $\sin 2x = \cos 3x$ により

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{\text{ア}} \left(\sqrt{\text{イ}} - \text{ウ} \right), (\sin 36^\circ)^2 = \frac{1}{\text{エ}} \left(\text{オ} - \sqrt{\text{カ}} \right)$$

を得る。

- (2) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積と、1 辺の長さが 1 である正五角形の面積はそれぞれ、

$$\frac{\text{キ}}{\text{ク}} \sqrt{\text{ケコ} + \text{サ}\sqrt{5}}, \quad \frac{\text{シ}}{\text{ス}} \sqrt{\text{セソ} + \text{タチ}\sqrt{5}}$$

である。

- (3) 1 辺の長さが 1 である正五角形 ABCDE において、線分 BD と線分 CE の交点、線分 CE と線分 DA の交点、線分 DA と線分 EB の交点、線分 EB と線分 AC の交点、線分 AC と線分 BD の交点をそれぞれ F, G, H, I, J とする。このとき、線分 FG の長さは $\frac{1}{\text{ツ}} \left(\text{テ} - \sqrt{\text{ト}} \right)$ であり、線分 AI, IB, BJ, JC, CF, FD, DG, GE, EH, HA によって囲まれた部分の面積を S とすると、その 2 乗 S^2 の値は

$$\frac{\text{ナニ}}{\text{ヌ}} - \frac{\text{ネ}}{\text{ノ}} \sqrt{\text{ハ}}$$

である。

(25 点)

(下書き用紙)

2

k, m, n を自然数とする。黒球が m 個、白球が n 個入っている袋がある。この袋の中をよくかき混ぜた後、この袋から球を 1 個取り出す試行を考える。取り出した球が白球であったとき、取り出した白球にあらたに白球を 1 個加えて袋にもどし、試行を繰り返す。取り出した球が黒球であったとき、それ以上試行を繰り返さず終了する。 k 回目の試行が行われ、かつ、ちょうど k 回目の試行で終了する確率を p_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) とする。なお、あらたに加えるための白球は、限りなくたくさんあるものとする。

(1) $m = n = 1$ とする。

$$(a) \quad p_2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad p_4 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}} \mid \boxed{\text{オ}}} \text{ であり,}$$

$$p_k = \frac{\boxed{\text{カ}}}{(k + \boxed{\text{キ}})(k + \boxed{\text{ク}})} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

である。ただし、 $\boxed{\text{キ}} < \boxed{\text{ク}}$ 。

(b) 80 回以上 2019 回以下試行を繰り返して終了する確率は

$$\frac{\boxed{\text{ケ}} \mid \boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}} \mid \boxed{\text{シ}} \mid \boxed{\text{ス}} \mid \boxed{\text{セ}}}$$

である。

(2) $m = 2, n = 4$ とする。

$$(a) \quad p_k = \frac{\boxed{\text{ソ}} \mid \boxed{\text{タ}}}{(k + \boxed{\text{チ}})(k + \boxed{\text{ツ}})(k + \boxed{\text{テ}})} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \text{ である。}$$

ただし、 $\boxed{\text{チ}} < \boxed{\text{ツ}} < \boxed{\text{テ}}$ 。

$$(b) \quad p_k \leq \frac{1}{12800} \text{ を満たす最小の } k \text{ の値は } \boxed{\text{ト}} \mid \boxed{\text{ナ}} \text{ である。}$$

$$(c) \quad \sum_{k=1}^{20} k p_k = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{又}}} \text{ である。}$$

(25 点)

(下書き用紙)

3

点 O を原点とする xyz 空間に、中心 $A(0,0,4)$ 、半径 2 とする球面 S があり、 O を通る直線が、球面 S と点 P で接するという。 O を頂点とし、点 P を通り xy 平面に平行な平面による S の切り口が底面となる直円錐を C とする。

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とおく。このとき、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$

であり、円錐 C の底面の半径は $\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また、 C の体積を V_1 とすると、 $V_1 = \boxed{\text{エ}} \pi$ である。

(2) 球面 S の外部で、円錐 C の側面と球面 S とで囲まれた部分を C^* とし、その体積を V_2 とすると、 $V_2 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi$ である。

(3) 点 O と点 $B(0,1,\sqrt{3})$ を通る直線を ℓ とする。円錐 C の中心軸が直線 ℓ の $z \geq 0$ の部分と重なるように、円錐 C を傾けて得られる円錐を C' とする。ただし、傾けた円錐 C' の頂点は点 O にあるものとする。

(a) 円錐 C' の底面上の点の z 座標の最小値を h とすると、 $h = \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(b) 円錐 C' の側面と平面 $z = h$ で囲まれた部分の体積を V_3 とすると、

$$V_3 = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}} \pi$$

である。

(25 点)

：（下書き用紙）

4

a を正の実数とする。定義域を $1 \leq x \leq 4$ とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 3^x + 3^{4-x} - 6a \left((\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{4-x} \right) + a^2 + 2a - 3$$

とし, $t(x) = (\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{4-x}$ とする。

(1) x が $1 \leq x \leq 4$ の範囲を動くとき, $t(x)$ の取りうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} \leq t(x) \leq \boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}}$$

である。

(2) $3^x + 3^{4-x}$ を $t(x)$ を用いて表すと $(t(x)) \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}$ となる。

(3) $f(x)$ の最小値を $m(a)$, 最大値を $M(a)$ とする。

(a) $2 \leq a < \frac{8}{3}$ のとき,

$$M(a) = \boxed{\text{キ}} a^2 - \boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}} a + \boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}$$

$$m(a) = -\boxed{\text{シ}} a^2 + \boxed{\text{ス}} a - \boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}}$$

である。また, $\frac{8}{3} \leq a \leq \frac{10}{3}$ のとき,

$$M(a) = \boxed{\text{タ}} a^2 - \boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}} a + \boxed{\text{テ}} \boxed{\text{ト}}$$

$$m(a) = -\boxed{\text{ナ}} a^2 + \boxed{\text{ニ}} a - \boxed{\text{ヌ}} \boxed{\text{ネ}}$$

である。そして,

$$\int_2^{\frac{10}{3}} (M(a) - m(a))^2 da = \frac{\boxed{\text{ノ}} \boxed{\text{ハ}} \boxed{\text{ヒ}} \boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}} \boxed{\text{ホ}}}$$

である。

(b) $m(a) \geq 22$ となるのは, $a \geq \boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}}$ のときである。

(25 点)

(下書き用紙)

