

Q 1

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 11 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の 内のアからフにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。ただし、 は 3 桁の数を表す。また、分数は既約分数として表すものとする。(35 点)

(1) 実数 a, b に対して、 a と b の大きい方を $\max\{a, b\}$ 、小さい方を $\min\{a, b\}$ と表す。ただし、 $a = b$ の場合は $\max\{a, b\} = \min\{a, b\} = a = b$ とする。実数 x に対して、

$$f(x) = \min\{\max\{(x-4)^2, x-2\}, -x^2 + 6x + 4\}$$

とおく。

(a) $f(x) = (x-4)^2$ となるための必要十分条件は

$$\text{ア} \leq x \leq \text{イ} \quad \text{または} \quad x = \text{ウ}$$

であり、 $f(x) = x-2$ となるための必要十分条件は

$$\text{エ} \leq x \leq \text{オ} \quad \text{または} \quad x = -\text{カ}$$

である。

(b) x が実数全体を動くとき、 $f(x)$ の最大値は キ であり、そのときの x の値は $x = \text{ク}$ である。

(c) $f(x) = k$ となるような実数 x がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲は ケ $< k < \text{コ}$ である。

(d) $t \geq 10$ を満たす実数 t に対して、

$$\int_0^t f(x) dx = -\frac{\text{サ}}{\text{シ}} t^3 + \text{ス} t^2 + \text{セ} t - \frac{\text{ソ} \text{タ} \text{チ}}{\text{ツ}}$$

である。

(下書き用紙)

- (2) t は $0 < t < \frac{\pi}{3}$ を満たす実数とする。座標平面において、4つの点

$$A(1, 0), \quad P(\cos t, \sin t), \quad B(-1, 0), \quad Q(\cos(\pi + 3t), \sin(\pi + 3t))$$

を頂点とする四角形の面積を $S(t)$ とおく。

- (a) 三角形 APB の面積は $\sin(\boxed{\text{テ}} t)$ であり、三角形 ABQ の面積は $\sin(\boxed{\text{ト}} t)$ である。

- (b) $S(t)$ の導関数は $S'(t) = \boxed{\text{ナ}} \cos t (\boxed{\text{ニ}} \cos^2 t - \boxed{\text{ヌ}})$ である。ただし、
 $\boxed{\text{ナ}} \geq \boxed{\text{ニ}}$ とする。

- (c) t が $0 < t < \frac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき、 $S(t)$ の最大値は $\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$ であ

り、そのときの $\cos t$ の値は $\cos t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}$ である。

(下書き用紙)

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 a は正の実数とする。座標平面において、双曲線 $C_1: x^2 - y^2 = 1$ と放物線 $C_2: y = ax^2$ がちょうど 2 つの共有点 A, B をもつとする。ただし、点 A の x 座標は正であるとする。このとき、次の問いに答えよ。(30 点)

- (1) a の値、および 2 点 A, B の座標を求めよ。
- (2) 双曲線 C_1 上の 2 点 A, B における接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。 l_1 および l_2 の方程式を求めよ。
- (3) (2) で定めた直線 l_1, l_2 、および放物線 C_2 で囲まれた部分を D とする。 D の面積を求めよ。
- (4) (3) で定めた D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(下書き用紙)

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 関数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x+x^3}$ ($x \geq 0$) について、次の問いに答えよ。 (35 点)

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $x \geq 2$ のとき、 $f'(x) < 0$ であることを示せ。
- (3) 自然数 n に対して $a_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。
- (4) (3) で定めた a_n に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ。

(下書き用紙)

