

1

(1) 重心の公式より

$$G\left(\frac{a_1+l_1+c_1}{3}, \frac{a_2+l_2+c_2}{3}\right) \dots (\text{答})$$

(2)

$$D\left(\frac{-3a_1 + 5 \cdot \frac{a_1+l_1+c_1}{3}}{5-3}, \frac{-3a_2 + 5 \cdot \frac{a_2+l_2+c_2}{3}}{5-3}\right)$$

$$= \left(\frac{-4a_1 + 5l_1 + 5c_1}{6}, \frac{-4a_2 + 5l_2 + 5c_2}{6}\right) \dots (\text{答})$$

同様に計算して

$$\left. \begin{aligned} E\left(\frac{5a_1 - 4l_1 + 5c_1}{6}, \frac{5a_2 - 4l_2 + 5c_2}{6}\right) \\ F\left(\frac{5a_1 + 5l_1 - 4c_1}{6}, \frac{5a_2 + 5l_2 - 4c_2}{6}\right) \end{aligned} \right\} \dots (\text{答})$$

(3) (2)の題意より

$$\vec{GA} = -\frac{5-3}{3} \vec{GD} = -\frac{2}{3} \vec{GD}, \vec{GB} = -\frac{2}{3} \vec{GE}, \vec{GC} = -\frac{2}{3} \vec{GF}$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{GB} - \vec{GA}| = \left| -\frac{2}{3} \vec{GE} - \left(-\frac{2}{3} \vec{GD}\right) \right| = \left| \left(-\frac{2}{3}\right)(\vec{GE} - \vec{GD}) \right| = \frac{2}{3} |\vec{DE}| \dots \textcircled{1}$$

同様に

$$|\vec{BC}| = |\vec{GC} - \vec{GB}| = \left| \left(-\frac{2}{3}\right)(\vec{GF} - \vec{GE}) \right| = \frac{2}{3} |\vec{EF}| \dots \textcircled{2}$$

$$|\vec{CA}| = |\vec{GA} - \vec{GC}| = \left| \left(-\frac{2}{3}\right)(\vec{GD} - \vec{GF}) \right| = \frac{2}{3} |\vec{FD}| \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$|\vec{AB}| : |\vec{BC}| : |\vec{CA}| = |\vec{DE}| : |\vec{EF}| : |\vec{FD}|$$

$$\text{つまり } AB : BC : CA = DE : EF : FD \quad \text{となる。}$$

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC$$

である。

2

$$\begin{aligned}
 (1) \log_{2^{2m-1}} a = \log_2 h &\Leftrightarrow \frac{\log_2 a}{\log_2 2^{2m-1}} = \log_2 h \\
 &\Leftrightarrow \frac{\log_2 a}{2m-1} = \log_2 h \\
 &\Leftrightarrow \log_2 a = \log_2 h^{2m-1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore a = h^{2m-1} \quad \dots \left(\frac{\text{答}}{\text{2}}\right)$$

(2) (1)より

$$a^x(a^x + h^m) = h^{m-1} a^x + a$$

$$\Leftrightarrow h^{(2m-1)x} (h^{(2m-1)x} + h^m) = h^{m-1} \cdot h^{(2m-1)x} + h^{2m-1}$$

$$\Leftrightarrow \{h^{(2m-1)x}\}^2 + h^m \cdot h^{(2m-1)x} - h^{m-1} \cdot h^{(2m-1)x} - h^{2m-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{h^{(2m-1)x} + h^m\} \{h^{(2m-1)x} - h^{m-1}\} = 0$$

$h > 1$, m : 自然数 より $h^{(2m-1)x}$ と h^m はともに正.

$$\therefore h^{(2m-1)x} = h^{m-1}$$

両辺 $h (> 1)$ を底とする対数をとる

$$(2m-1)x = m-1$$

$2m-1 \neq 0$ より

$$x = \frac{m-1}{2m-1} \quad \dots \left(\frac{\text{答}}{\text{3}}\right)$$

3

$$(1) x = \sin \theta + \cos \theta \text{ とし}$$

$$x^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2}$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3(\sin \theta + \cos \theta) + 3 \sin \theta \cos \theta + 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 3x + 3 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} + 2(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} + 2 \cdot x \cdot (1 - \frac{x^2 - 1}{2}) \\ &= -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - \frac{3}{2} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) x = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$$

$$0^\circ \leq \theta < 360^\circ \text{ とし } 45^\circ \leq \theta + 45^\circ < 360^\circ + 45^\circ \text{ となる}$$

$$-1 \leq \sin(\theta + 45^\circ) \leq 1 \quad \therefore -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - \frac{3}{2} \quad \text{と } f'(x) < 0$$

$$f'(x) = -3x^2 + 3x + 6 = -3(x-2)(x+1)$$

$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ を考慮すると

$f(x)$ の増減表は右図

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{2}) &= -(-\sqrt{2})^3 + \frac{3}{2}(-\sqrt{2})^2 + 6(-\sqrt{2}) - \frac{3}{2} \\ &= -4\sqrt{2} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= -(\sqrt{2})^3 + \frac{3}{2}(\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{2} - \frac{3}{2} \\ &= 4\sqrt{2} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$f(-1) = -(-1)^3 + \frac{3}{2}(-1)^2 + 6(-1) - \frac{3}{2} = -5$$

よって $f(-\sqrt{2}) < f(\sqrt{2})$ であり、

$$x = \sqrt{2} \text{ のとき } \sin(\theta + 45^\circ) = 1 \quad (0^\circ \leq \theta < 360^\circ \text{ とし}) \quad \theta = 45^\circ$$

$$x = -1 \text{ のとき } \sin(\theta + 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0^\circ \leq \theta < 360^\circ \text{ とし}) \quad \theta = 180^\circ, 270^\circ$$

したがって $f(\theta)$ は

$$\theta = 45^\circ \text{ のとき 最大値 } 4\sqrt{2} + \frac{3}{2} \text{ をとり、}$$

$$\theta = 180^\circ, 270^\circ \text{ のとき 最小値 } -5 \text{ をとる。}$$

} (答)

x	$-\sqrt{2}$	$\dots$	-1	$\dots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-\sqrt{2})$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(\sqrt{2})$

4

2つの箱から引いたカードの数字をそれぞれ a, b とし、 $a > b$ のとき $y = a, x = b$, $a < b$ のとき $y = b, x = a$, $a = b$ のとき $y = a$ とすれば、題意より $X = 2y - x$ となる。 $(1 \leq x \leq y \leq 8)$

(1) $2y - x = 7$ となる整数 (x, y) で、 $1 \leq x \leq y \leq 8$ を満たす組み合わせは $(x, y) = (1, 4), (3, 5), (5, 6), (7, 7)$

$(a, b) = (1, 4), (4, 1), (3, 5), (5, 3), (5, 6), (6, 5), (7, 7)$ より

(a, b) の組み合わせは 7通りなので、求めるべき確率は

$$\frac{7}{8^2} = \frac{7}{64} \dots (\text{答})$$

(2) $2y - x = X \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}X + \frac{X}{2}$. これは、 $1 \leq x \leq y \leq 8$ を

満たす整数 (x, y) の組み合わせに対し、 X は直線 $y = \frac{1}{2}x + \frac{x}{2}$ の

切片の2倍であることを表している。 $1 \leq x \leq y \leq 8$ を満たす格子点と、

その格子点を通る直線

$y = \frac{1}{2}x + \frac{x}{2}$ を右図

に示す

$X = i (i = 1, 2, \dots, 15)$

に於て、右図より (x, y) の

組み合わせが分かる、

$y \neq x$ のとき

$(a, b) = (x, y), (y, x)$

$y = x$ のとき

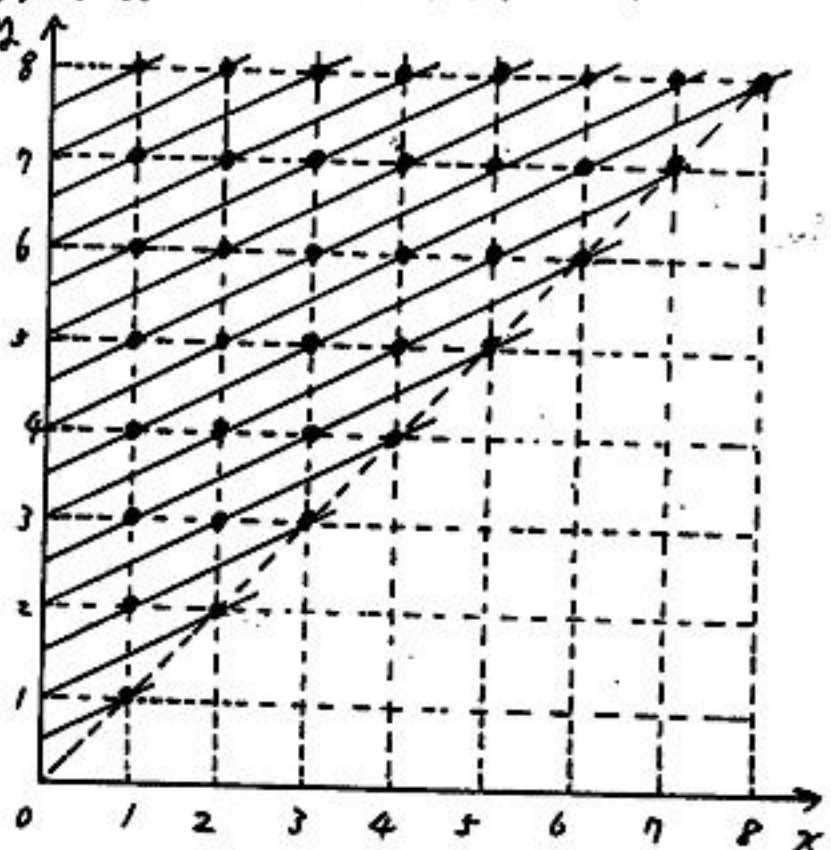
$(a, b) = (x, x)$

とすることによって

場合の数を求め、

確率分布表を作ると

下図になる。



X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(X)$	$\frac{1}{8^2}$	$\frac{1}{8^2}$	$\frac{2}{8^2}$	$\frac{2}{8^2}$	$\frac{3}{8^2}$	$\frac{3}{8^2}$	$\frac{4}{8^2}$	$\frac{4}{8^2}$	$\frac{5}{8^2}$	$\frac{5}{8^2}$	$\frac{6}{8^2}$	$\frac{6}{8^2}$	$\frac{4}{8^2}$	$\frac{4}{8^2}$	$\frac{2}{8^2}$

よって、 X の期待値は

$$\frac{1}{8^2} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 12 \cdot 6 + 13 \cdot 4 + 14 \cdot 4 + 15 \cdot 2)$$

$$= \frac{540}{64} = \frac{135}{16} \dots (\text{答})$$