

1

$$(1) z-3=r(\cos\theta+i\sin\theta) \Leftrightarrow z=3+r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

($r \geq 0, -\pi \leq \theta < \pi$) とおく.

$$(z-3)^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta) \geq 0 \text{ より、}$$

$$r^3 \sin 3\theta = 0 \dots \textcircled{1} \quad \pm T=12$$

$$r^3 \cos 3\theta \geq 0 \dots \textcircled{2}$$

$r=0$ のとき (すなわち $z=3$ のとき) は $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ と共に成立.

$r \neq 0$ のとき, $-\pi \leq \theta < \pi \Leftrightarrow -3\pi \leq 3\theta < 3\pi$ ゆえ $\textcircled{1}$ より

$$3\theta = -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$$

$$\therefore \theta = -\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \dots \textcircled{1'}$$

$r \neq 0$ のとき (すなわち $r > 0$ のとき) $\textcircled{2}$ より $\cos 3\theta \geq 0$ より

$$-\frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi \dots \textcircled{2'}$$

$$\textcircled{1'}, \textcircled{2'} \text{ より } \theta = -\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi$$

以上のことから, $r \geq 0$ に対し

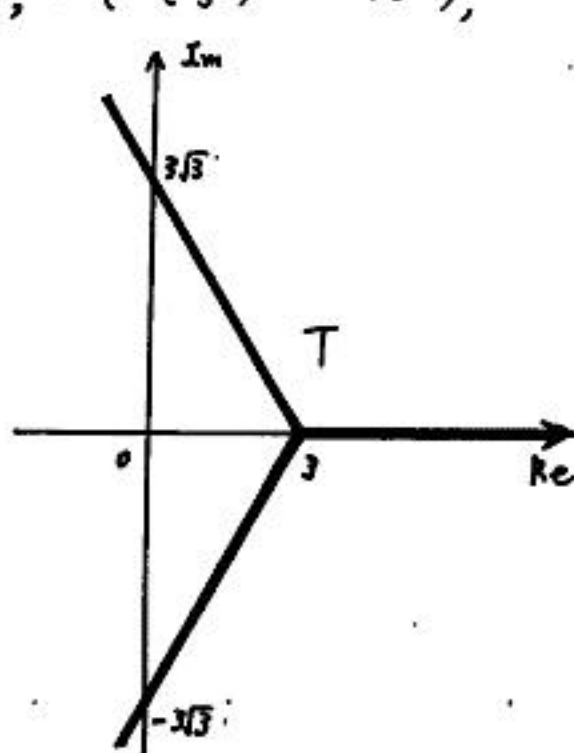
$$z=3+r(\cos \frac{2}{3}\pi+i\sin \frac{2}{3}\pi), 3+r(\cos(-\frac{2}{3}\pi)+i\sin(-\frac{2}{3}\pi)),$$

$$3+r(\cos 0+i\sin 0)$$

$$=3+r, 3+r(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

T を図示すると右図の

太線になる.



(2) T の 3 つの直線を

$$l_1: z=3+r(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$l_2: z=3+r(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$l_3: z=3+r$$

とおく.

(i) z が l_3 上のとき $|z|$ の最小値は 3.

(ii) z が l_1 上のとき, $|z|$ が最小となるのは,

O から l_1 へ垂線を下ろしたときの足を

H とおくと, $z=H$ となるべきである.

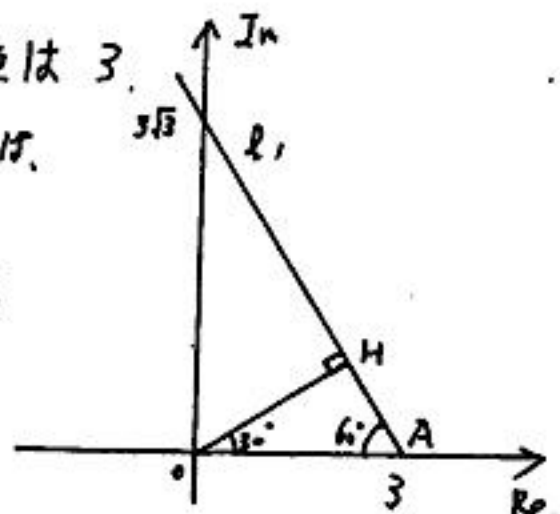
したがって最小値は

$$OH = OA \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

であり,

$$z = OH \cdot \cos 30^\circ + i \cdot AH \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$$



(iii) z が l_2 上のとき, 同様に (i), 対称性を考慮し

$$\text{最小値は } \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad z = \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$$

(ii) ~ (iii) より, $|z|$ は

$$z = \frac{9}{4} \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}i \text{ のとき最小値 } \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ をとる} \dots (\text{答})$$

(3) z が l_2 上のとき

$|z+1|+|z-1|$ の最小値は

$$|3+1|+|3-1|=4+2=6.$$

z が l_1 上にあるとき (i) について,

z が l_1 上の点 M にあるとき

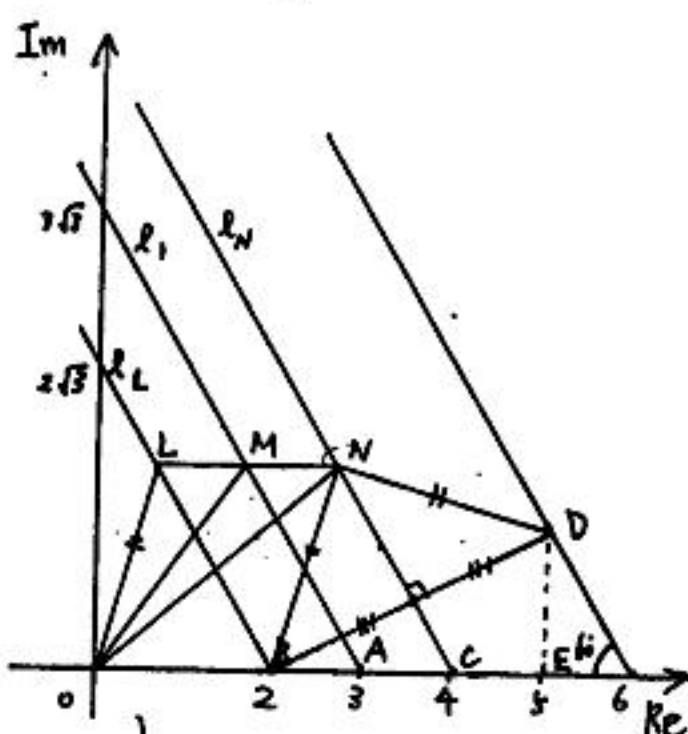
$z-1$ は点 L, $z+1$ は点 N

に位置する.

$$|z+1|=ON, |z-1|=OL$$

なので, OL+ON の最小値を求めよ.

(L, M, N は x 軸に平行,
 l_1 に平行な点 B(2) を通る直線を l_L ,
 l_1 に平行な点 C(3) を通る直線を l_N
 とおく.)



l_N に関して, 点 B と対称な点を点 D とおくと,

$$OL = BN = ND.$$

$$\therefore |z+1|+|z-1| = ON + ND$$

これが最小値をとるのは, O, N, D が同一直線上に

なるときで, 最小値は

$$OD = \sqrt{OE^2 + ED^2} = \sqrt{5^2 + (1 \cdot \tan 60^\circ)^2}$$

$$= \sqrt{25+3} = 2\sqrt{7}.$$

$$\text{直線 OD の式は } y = \frac{\sqrt{3}}{5}x \quad (z+1=x+iy \text{ とし } (x, y) \text{ 平面におきかえた})$$

$$\text{直線 } l_N \text{ の式は } y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5}x = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} \text{ より } x = \frac{10}{3}.$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

より, $|z+1|+|z-1|$ が最小値をとるとき N の座標は

$$\frac{10}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

$$\therefore z+1 = \frac{10}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i \text{ なの } z = \frac{7}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

z が l_2 上にあるときは, 対称性より

$$\text{最小値は } 2\sqrt{7}, \quad z = \frac{7}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

以上のことから, z が T 上を動くとき $|z+1|+|z-1|$ は

$$z = \frac{7}{3} \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}i \text{ のとき, 最小値 } 2\sqrt{7} \text{ をとる}$$

... (答)

[2]

$$(1) I_1 = \int e^{-x} \sin(\pi x) dx, I_2 = \int e^{-x} \cos(\pi x) dx$$

とおく。部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} I_1 &= -e^{-x} \sin(\pi x) - \int -e^{-x} \pi \cos(\pi x) dx \\ &= -e^{-x} \sin(\pi x) + \pi \int e^{-x} \cos(\pi x) dx \end{aligned}$$

$$\therefore I_1 - \pi I_2 = -e^{-x} \sin(\pi x) + c_1 \quad (c_1: \text{積分定数}) \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -e^{-x} \cos(\pi x) + \int e^{-x} \pi (-\sin(\pi x)) dx \\ &= -e^{-x} \cos(\pi x) - \pi \int e^{-x} \sin(\pi x) dx \end{aligned}$$

$$\therefore \pi I_1 + I_2 = -e^{-x} \cos(\pi x) + c_2 \quad (c_2: \text{積分定数}) \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、積分定数を改めて a, b とおくと

$$I_1 = -\frac{1}{1+\pi^2} e^{-x} \sin(\pi x) - \frac{\pi}{1+\pi^2} e^{-x} \cos(\pi x) + a \quad \left. \vphantom{I_1} \right\} \left(\frac{\text{答}}{2} \right)$$

$$I_2 = \frac{\pi}{1+\pi^2} e^{-x} \sin(\pi x) - \frac{1}{1+\pi^2} e^{-x} \cos(\pi x) + b$$

(2) $n \leq x \leq n+1$ のとき

$$|\sin(\pi x)| = \begin{cases} \sin \pi x & (n: \text{偶数}) \\ -\sin \pi x & (n: \text{奇数}) \end{cases} \quad \text{よって}$$

n が偶数のとき

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} e^{-x} |\sin(\pi x)| dx &= \int_n^{n+1} e^{-x} \sin(\pi x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{1+\pi^2} e^{-x} \sin(\pi x) - \frac{\pi}{1+\pi^2} e^{-x} \cos(\pi x) \right]_n^{n+1} \\ &= -\frac{1}{1+\pi^2} \left\{ e^{-(n+1)} \sin(n+1)\pi - e^{-n} \sin n\pi \right. \\ &\quad \left. + \pi e^{-(n+1)} \cos(n+1)\pi - \pi e^{-n} \cos n\pi \right\} \\ &= \frac{\pi}{1+\pi^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) e^{-n} \end{aligned}$$

n が奇数のとき

$$\int_n^{n+1} e^{-x} |\sin(\pi x)| dx = -\int_n^{n+1} e^{-x} \sin(\pi x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+\pi^2} \left\{ e^{-(n+1)} \sin(n+1)\pi - e^{-n} \sin n\pi \right. \\ &\quad \left. + \pi e^{-(n+1)} \cos(n+1)\pi - \pi e^{-n} \cos n\pi \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{1+\pi^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) e^{-n}$$

$$\therefore \text{よって} \int_n^{n+1} e^{-x} |\sin(\pi x)| dx = \frac{\pi}{1+\pi^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) e^{-n} \dots \left(\frac{\text{答}}{2} \right)$$

$$(3) a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} e^{-x} |\sin(\pi x)| dx$$

$$= \frac{\pi}{1+\pi^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k}$$

$$= \frac{\pi}{1+\pi^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \frac{1 \cdot \{1 - (\frac{1}{e})^n\}}{1 - \frac{1}{e}}$$

$$\longrightarrow \frac{\pi}{1+\pi^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{\pi}{1+\pi^2} \cdot \frac{e+1}{e} \cdot \frac{e}{e-1}$$

$$= \frac{\pi}{1+\pi^2} \left(1 + \frac{2}{e-1} \right) \dots \left(\frac{\text{答}}{2} \right)$$

[3]

- (1) $P(1) = (i, j)$ ($0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 4$) となるとき、
サイコロの目の出方は $(3+1) \times (4+1) = 20$ (通り)
なので、求める確率は

$$\frac{20}{6^2 \times 6^2} = \frac{5}{324} \dots (\text{答})$$

- (2) サイコロを5回ふって、 $P(5) = (24, 1)$ となるのは、
サイコロAについて、6が4回、5が1回 出て、
サイコロBについて、1が4回、2が1回 出るときなので、
 $5 \times 5 = 25$ (通り)

よって、求めるべき確率は

$$\frac{25}{(6^2)^5} = \frac{25}{6^{10}} \dots (\text{答})$$

- (3) $P(n) = (5n-1, 5n-3)$ となる確率を P_n とおく。

$n=1$ のとき $P(1) = (4, 2)$ なので $P_1 = \frac{1}{6^2}$

$n=2$ のとき $P(2) = (9, 7)$ なので、

サイコロAの目は 6が1回 5が1回 の2通り、

サイコロBの目は $\begin{cases} 6が1回 3が1回, \\ 5が1回 4が1回 \end{cases}$ の $2 \times 2 = 4$ (通り)

より、 $P(2) = (9, 7)$ となるのは $2 \times 4 = 8$ (通り) なので

$$P_2 = \frac{8}{(6^2)^2} = \frac{8}{6^4}$$

$n=3$ のとき $P(3) = (14, 12)$ なので、

サイコロAの目は、6が2回 5が1回 の3通り、

サイコロBの目は $\begin{cases} 6が2回 3が1回 \\ 6, 5, 4が1回ずつ \\ 5が3回 \end{cases}$ の $3+3+1=7$ (通り)

なので $P_3 = \frac{3 \times 7}{(6^2)^3} = \frac{30}{6^6}$

$n > 3$ のとき $P(n) = (5n-1, 5n-3)$ となるのは

サイコロAについて、

6が $(n-1)$ 回、5が1回 (サイコロAの出方は n 通り)

サイコロBについて

$$\begin{cases} 6が(n-1)回, 3が1回 \dots n \text{ 通り} \\ 6が(n-2)回, 5が1回, 4が1回 \dots \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) \text{ (通り)} \\ 6が(n-3)回, 5が3回 \dots \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ (通り)} \end{cases}$$

の 和 $n + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ (通り)

サイコロA, B の組み合わせは

$$n \times \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{1}{6} n^2 (n+1)(n+2) \text{ (通り)}$$

これは $n=1, 2, 3$ でも成り立つ

すべての A, B の目の組み合わせは $(6^2)^n = 6^{2n}$ (通り)

なので、任意の n に対し、 $P(n) = (5n-1, 5n-3)$ となる
確率 P_n は

$$P_n = \frac{\frac{1}{6} n^2 (n+1)(n+2)}{6^{2n}}$$

$$= \frac{n^2 (n+1)(n+2)}{6^{2n+1}} \dots (\text{答})$$