

1

$$\begin{aligned}
 (1) \overrightarrow{GH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AG} \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \overrightarrow{GG_k} &= \overrightarrow{AG_k} - \overrightarrow{AG} \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE_k} + \overrightarrow{AF_k}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE_k} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF_k}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE_k} + \overrightarrow{BF_k}) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{m}\overrightarrow{BC}\right) \\
 &= \frac{k}{2n}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2m}\overrightarrow{BC} \quad \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) (2)より

$$\overrightarrow{GG_k} = k \left(\frac{1}{2n}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2m}\overrightarrow{BC} \right) = k\overrightarrow{GG_1} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n)$$

よて、任意の m, n に対し点 $G, G_1, \dots, G_n$ は同一直線上にある。

点 H も同一直線上にあることから、

$$\overrightarrow{GH} = t\overrightarrow{GG_1} \quad (t \geq 2) \text{ とおける}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{t}{2n}\overrightarrow{AD} + \frac{t}{2m}\overrightarrow{BC} \text{ であり、 } AD \text{ と } BC \text{ が平行で}$$

ないことから $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{BC}$ は1次独立なので

$$\frac{1}{2} = \frac{t}{2n}, \quad \frac{1}{2} = \frac{t}{2m} \quad \therefore t = n = m$$

したがって、 m, n の満たすべき条件は

$$m = n. \quad \dots (\text{答})$$

2

$$(1) B^2 = \begin{pmatrix} 2 & s \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & s \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+s & 2s+st \\ 2+t & s+t^2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } s = -4, t = -2 \dots (\text{答})$$

$$(2) A = xE + yB \text{ とおくと (1) より}$$

$$A = \begin{pmatrix} x+2y & -4y \\ y & x-2y \end{pmatrix}$$

$$(x+2y) + (x-2y) = 2x, (x+2y)(x-2y) - (-4y)y = x^2 \text{ より}$$

ケリー・ハミルトンの定理から

$$A^2 = 2x \begin{pmatrix} x+2y & -4y \\ y & x-2y \end{pmatrix} - x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+4xy & -8xy \\ 2xy & x^2-4xy \end{pmatrix} \dots (\text{答})$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(2xA - x^2E) = 2xA^2 - x^2AE$$

$$= 2x \begin{pmatrix} x^2+4xy & -8xy \\ 2xy & x^2-4xy \end{pmatrix} - x^2 \begin{pmatrix} x+2y & -4y \\ y & x-2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^3+6x^2y & -12x^2y \\ 3x^2y & x^3-6x^2y \end{pmatrix} \dots (\text{答})$$

$$(3) (2) \text{ より 自然数 } n \text{ に対し}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n + 2nx^{n-1}y & -4nx^{n-1}y \\ nx^{n-1}y & x^n - 2nx^{n-1}y \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことが予想されるので、①が成り立つことを数学的帰納法で示す

$$(i) n=1 \text{ のとき}$$

$$A = \begin{pmatrix} x^1 + 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1}y & -4 \cdot 1 \cdot x^{1-1}y \\ 1 \cdot x^{1-1}y & x^1 - 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & -4y \\ y & x-2y \end{pmatrix}$$

(2) より $n=1$ のとき ① は成立.

$$(ii) n=k (k \text{ は自然数}) \text{ のとき ① が成り立つと仮定すると,}$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} x^k + 2kx^{k-1}y & -4kx^{k-1}y \\ kx^{k-1}y & x^k - 2kx^{k-1}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y & -4y \\ y & x-2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^{k+1} + 2kx^ky + 2x^ky & -4x^ky - 4kx^ky \\ kx^ky + x^ky & x^{k+1} - 2kx^ky - 2x^ky \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^{k+1} + 2(k+1)x^{(k+1)-1}y & -4(k+1)x^{(k+1)-1}y \\ (k+1)x^{(k+1)-1}y & x^{k+1} - 2(k+1)x^{(k+1)-1}y \end{pmatrix}$$

ゆえに $n = k+1$ のときも成立.

$$(ii), (iii) \text{ より, 任意の自然数 } n \text{ に対し}$$

$$(xE + yB)^n = \begin{pmatrix} x^n + 2nx^{n-1}y & -4nx^{n-1}y \\ nx^{n-1}y & x^n - 2nx^{n-1}y \end{pmatrix} \dots (\text{答})$$

$$\boxed{3} \quad (i) \quad (iii) \text{より } f(0) = f(3) = f(6) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

$$(i), (iii) \text{より } f'(3) = f'(6) = 0$$

$f(3) = 0$ より、 $f(t)$ は 6 次の多項式なの?

$$f(t) = a(t-3)^6 + b(t-3)^5 + c(t-3)^4 + d(t-3)^3 + e(t-3)^2 + f(t-3)$$

(a, b, c, d, e, f : 定数) とおくと、 (ii) より $a > 0$. したがって、

$$f'(t) = 6a(t-3)^5 + 5b(t-3)^4 + 4c(t-3)^3 + 3d(t-3)^2 + 2e(t-3) + f$$

$$f'(3) = 0 \text{ より } f = 0. \quad f(6) = f(0) = 0 \text{ より、}$$

$$f(6) = 3^6 a + 3^5 b + 3^4 c + 3^3 d + 3^2 e = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$f(0) = 3^6 a - 3^5 b + 3^4 c - 3^3 d + 3^2 e = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$(\textcircled{1} + \textcircled{2}) \times \frac{1}{3^2} \text{より } 3^4 a + 3^2 c + e = 0 \dots \textcircled{3}$$

$$(\textcircled{1} - \textcircled{2}) \times \frac{1}{3^3} \text{より } 3^2 b + d = 0 \dots \textcircled{4}$$

また、 $f'(3) = f'(6) = 0$ より

$$f'(6) = 6a \cdot 3^5 + 5b \cdot 3^4 + 4c \cdot 3^3 + 3d \cdot 3^2 + 2e \cdot 3 = 0 \dots \textcircled{5}$$

$$f'(0) = -6a \cdot 3^5 + 5b \cdot 3^4 - 4c \cdot 3^3 + 3d \cdot 3^2 - 2e \cdot 3 = 0 \dots \textcircled{6}$$

$$(\textcircled{5} + \textcircled{6}) \times \frac{1}{2 \cdot 3^3} \text{より } 5 \cdot 3 b + d = 0 \dots \textcircled{7}$$

$$(\textcircled{5} - \textcircled{6}) \times \frac{1}{2 \cdot 6} \text{より } 3^5 a + 2 \cdot 3^2 c + e = 0 \dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{3} \text{と} \textcircled{8} \text{より } c = -18a, \quad e = 81a, \quad \textcircled{4} \text{と} \textcircled{7} \text{より } b = d = 0$$

$$\therefore f(t) = a(t-3)^6 - 18a(t-3)^4 + 81a(t-3)^2$$

$$f'(t) = 6a(t-3)^5 - 72a(t-3)^3 + 162a(t-3)$$

$$= 6a(t-3) \{ (t-3)^4 - 12(t-3)^2 + 27 \}$$

$$= 6a(t-3) \{ (t-3)^2 - 3 \} \{ (t-3)^2 - 9 \}$$

$$= 6a t(t-3)(t-6) \{ t - (3+\sqrt{3}) \} \{ t - (3-\sqrt{3}) \}$$

$$f'(t) = 0 \text{ とすると } t = 0, 3, 6, 3 \pm \sqrt{3}.$$

よって、増減表は右図.

t	0	...	$3-\sqrt{3}$	...	3	...	$3+\sqrt{3}$	...	6	...
$f'(t)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(3-\sqrt{3})$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(3+\sqrt{3})$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(t)$ が最大となるのは $t = 3 \pm \sqrt{3}$ のとき?

$$f(3 \pm \sqrt{3}) = a \cdot (\sqrt{3})^6 - 18a \cdot (\sqrt{3})^4 + 81a \cdot (\sqrt{3})^2$$

$$= 108a$$

$$(iv) \text{より } a = 1.$$

$$\text{したがって、} f(t) = (t-3)^6 - 18(t-3)^4 + 81(t-3)^2$$

$$= t^2(t-3)^2(t-6)^2 \dots (\text{答})$$

(2) $0 \leq t \leq 3$ に P が進んだ距離を l_1 , $3 \leq t \leq 6$ に P が進んだ距離を l_2 とおく. (速度の定義より).

$$l_1 = \int_0^3 f(t) dt = \int_0^3 t^2(t-3)^2(t-6)^2 dt \dots \textcircled{9}$$

$$l_2 = \int_3^6 f(t) dt.$$

$$\therefore t, \quad 6-t = x \text{ とおくと、} dt = -dx.$$

$$t: 3 \rightarrow 6 \text{ のとき } x: 3 \rightarrow 0 \text{ なの?}$$

$$l_2 = \int_3^0 f(6-x)(-dx)$$

$$= \int_0^3 f(6-x) dx$$

$$= \int_0^3 (6-x)^2 \{ (6-x) - 3 \}^2 \{ (6-x) - 6 \}^2 dx$$

$$= \int_0^3 (x-6)^2 (x-3)^2 x^2 dx \dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{10} \text{より } l_1 = l_2 \text{ となる.}$$