

1

(1) $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ と素因数分解されるので, 2000 の正の約数は全て

$$2^i \cdot 5^j \quad (0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 3)$$

と表される. したがって, 2000 の正の約数の個数は

$$(4+1) \times (3+1) = 20[\text{個}]$$

(2) まずは自然数の 2 乗で表される偶数の個数を求める. 自然数の 2 乗で表される偶数となる必要十分条件は

$$i \geq 1, \quad i \text{ と } j \text{ が偶数 (0 を含む)}$$

なので, $(i, j) = (2, 0), (2, 2), (4, 0), (4, 2)$ の 4 個. また, 偶数は $i \geq 1$ の条件から 16 個. したがって, 自然数の 2 乗で表されず, 偶数であるものの個数は

$$16 - 4 = 12[\text{個}]$$

(3) 8 の倍数は $8k$ で表すことができるので,

$$2001 \leq 8k \leq 3000$$

$$\frac{2001}{8} = 250 + \frac{1}{8} \leq k \leq 375$$

以上の条件を満たす整数 k の個数に等しいので, 125 個

(4) 12 で割って 8 余る数 $12l + 8$ で表すことができるので,

$$2001 \leq 12l + 8 \leq 3000$$

$$\frac{1993}{12} = 166 + \frac{1}{12} \leq l \leq \frac{2992}{12} = 249 + \frac{4}{12}$$

以上の条件を満たす整数 l の個数に等しいので, 83 個

(5) (3) と (4) の条件に重複する, “12 で割ると 8 余る, 8 の倍数” は $24m + 8$ で表すことができるので

$$2001 \leq 24m + 8 \leq 3000$$

$$\frac{1993}{24} = 83 + \frac{1}{24} \leq m \leq \frac{2992}{24} = 124 + \frac{16}{24}$$

以上の条件を満たす整数 m の個数に等しいので, 41 個.

したがって, 8 の倍数となるかまたは 12 で割ると 8 余るものの個数は

$$125 + 83 - 41 = 167[\text{個}]$$

2

(1)

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} p_{n+2} = \frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \\ q_{n+2} = \frac{3}{4}a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n \end{cases}$$

(2) 条件から $a_0 = 1, b_0 = p_0 = q_0 = 0$ なので,

$$p_1 = \frac{1}{4}, \quad q_1 = \frac{3}{4}$$

また, n が 3 以上の奇数のときは (1) より

$$p_n = \frac{1}{3}(p_{n-2} + q_{n-2}) = \frac{1}{3}$$

$$q_n = \frac{2}{3}(p_{n-2} + q_{n-2}) = \frac{2}{3}$$

そして n が偶数のときは X 氏は A または B にいるので

$$p_n = q_n = 0$$

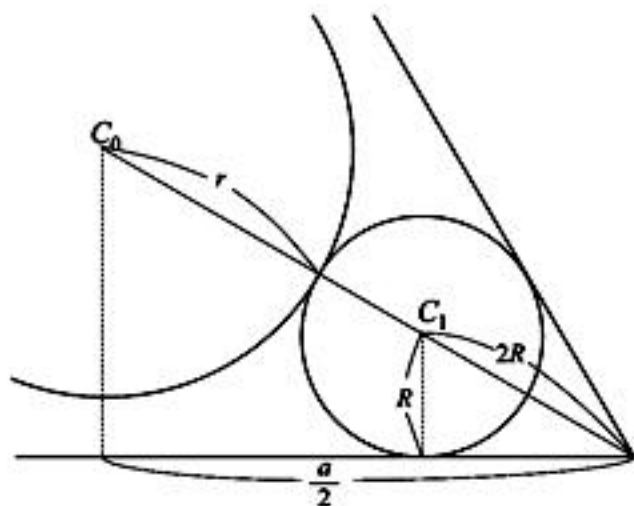
以上を纏めると

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{4}, q_n = \frac{3}{4} & (n = 1) \\ p_n = \frac{1}{3}, q_n = \frac{2}{3} & (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数}) \\ p_n = q_n = 0 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

3

- (1) C_1, C_2, C_3 は位置は異なるが同じ状況にあるので, その半径は等しい. その半径を R とすると, 右図から

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2} &= r + 3R \\ R &= \frac{1}{3} \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - r \right)\end{aligned}$$



(2)

$$\begin{aligned}S &= \pi r^2 + 3\pi R^2 \\ &= \pi \left(\frac{4}{3}r^2 - \frac{2\sqrt{3}a}{9}r + \frac{a^2}{9} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(r - \frac{\sqrt{3}}{12}a \right)^2 + \frac{\pi}{12}a^2\end{aligned}$$

より,

$$r = \frac{\sqrt{3}}{12}a \text{ のときに } S \text{ は最小値 } \frac{\pi}{12}a^2 \text{ をとる}$$

4

(1) ヘロンの公式から

$$\triangle ABD = \sqrt{\frac{5+6+7}{2} \frac{5+6-7}{2} \frac{5-6+7}{2} \frac{-5+6+7}{2}} = 6\sqrt{6}$$

また $\triangle ABD$ と $\triangle AQP$, $\triangle CQ'P'$ は相似の関係にあるから

$$\triangle AQP = 6\sqrt{6}t^2$$

$$\triangle AQP' = 6\sqrt{6}(1-t)^2$$

したがって

$$\begin{aligned} S(t) &= 2\triangle ABD - \triangle AQP - \triangle CQ'P' \\ &= 6\sqrt{6}(1+2t-2t^2) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(t)dt &= 6\sqrt{6} \int_0^1 (1+2t-2t^2)dt \\ &= 6\sqrt{6} \left[t + t^2 - \frac{2}{3}t^3 \right]_0^1 \\ &= 8\sqrt{6} \end{aligned}$$