

1

- (1) 時刻 t における細胞の数が n_t である確率を $P(n_1, n_2, \dots)$ で表すと, $n_3 = 3$ である確率は

$$P(1, 2, 3) + P(2, 2, 3) + P(2, 3, 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{32}$$

- (2) 時刻 $k (1 \leq k \leq n)$ で 1 回だけ分裂が起こる確率なので, 1 つ 1 つの事象では $n_t = 1 (t < k), n_t = 2 (k \leq t \leq n)$ となる. したがって, その確率の総和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P(1, \dots, 1, 2, \dots, 2) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \end{aligned}$$

- (3) 時刻 t での細胞の数の期待値を $E(t)$ と書くと

$$\begin{aligned} E(2) &= P(1, 1) \times 1 + P(1, 2) \times 2 + P(2, 2) \times 2 + P(2, 3) \times 3 + P(2, 4) \times 4 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

2

(1) C_1 の頂点の座標を $\left(t, -\frac{1}{t^2}\right)$ とおくと C_1 の方程式は

$$C_1: y = (x-t)^2 - \frac{1}{t^2}$$

とおくことができる. これが原点 $(0, 0)$ を通るので

$$0 = t^2 - \frac{1}{t^2}$$

$$(t^2 + 1)(t + 1)(t - 1) = 0$$

ここで $t > 0$ より $t = 1$. したがって C_1 の方程式は

$$C_1: y = x^2 - 2x$$

(2) 点 P_n の x 座標を p_n で表すことにすると, C_n は P_n と P_{n-1} を通るので

また, 明らかに $p_{n-1} < p_n$ なので

$$p_n^2 = p_{n-1}^2 + 4$$

$$C_n: y = (x - p_n)(x - p_{n-1})$$

ここで (1) より $p_1 = 2$ がわかるので

この頂点 $\left(\frac{p_n + p_{n-1}}{2}, -\frac{(p_n - p_{n-1})^2}{4}\right)$ は G 上にあるので

$$p_n^2 = 4n$$

$$p_n = 2\sqrt{n}$$

$$-\frac{(p_n - p_{n-1})^2}{4} = -\frac{4}{(p_n + p_{n-1})^2}$$

以上より, P_n の座標は

$$(p_n^2 - p_{n-1}^2)^2 = 16$$

$$P_n(2\sqrt{n}, 0)$$

(3) (2) より, S_n は

$$S_n = \frac{1}{6}(p_n - p_{n-1})^3 = \frac{4}{3}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^3$$

したがって

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3}S_n &= \frac{4\sqrt{n^3}}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \right)^3 \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \right)^3 \rightarrow \frac{1}{6} \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

3

(1)

$$\begin{aligned}(A-E)(A-2E) &= \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a-1)(a-2)+2b & b(a-4) \\ 2a-8 & 2b+6 \end{pmatrix} = O\end{aligned}$$

から, 各成分を比べて

$$a=4, \quad b=-3$$

(2)

$$B=A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{aligned}B^2+\alpha B+\beta E &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}+\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2\alpha+4\beta-5 & 6\alpha+9 \\ -4\alpha-6 & 8\alpha+4\beta+10 \end{pmatrix} = O\end{aligned}$$

各成分を比較して

$$\alpha=-\frac{3}{2}, \quad \beta=\frac{1}{2}$$

(3) (2) より

$$B^2=\frac{3}{2}B-\frac{1}{2}E$$

これを繰り返し代入していくと

$$\begin{aligned}&(2+4c)B^4-(5+4c)B^3-cB^2+(7+c)B-3E \\ &= (-2+2c)B^3-(1+3c)B^2+(7+c)B-3E \\ &= -4B^2+8B-3E \\ &= 2B-E \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$