

1

(1) 解と係数の関係から

$$\begin{cases} a = 1 - (\alpha + \beta) \\ b = \alpha\beta - (\alpha + \beta) \\ c = \alpha\beta \end{cases}$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 - a \\ (\alpha + \beta)^2 &= (1 - a)^2 \\ 1 + 2\alpha\beta &= a^2 - 2a + 1 \\ 1 + 2c &= a^2 - 2a + 1 \\ c &= \frac{1}{2}a(a - 2) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= 2 \int_0^1 (ax^2 + c) dx \\ &= \frac{2}{3}a + 2c \\ &= a^2 - \frac{4}{3}a \\ &= \left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

ここで $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ から, α と β はパラメータ変数 θ を用いて $\alpha = \cos \theta, \beta = \sin \theta$ とおくことができる. このとき a は

$$a = 1 - (\alpha + \beta) = 1 - (\cos \theta + \sin \theta) = 1 - \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

と表されるので, その範囲は

$$1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$$

となる. また, $-a + \frac{1}{2}a^2 - a + 2 \neq 0$ $a \neq 2$ より

$$-\frac{4}{9} \leq \int_{-1}^1 f(x)dx \leq (1 + \sqrt{2})^2 - \frac{4}{3}(1 + \sqrt{2}) = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{3}$$

(ただし, $\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{4}{3}$ は除く)

(1) (証明)

$$n \log n - n + 1 \leq \log(n!) \leq (n+1) \log(n+1) - n \quad (*)$$

この不等式を数学的帰納法を用いて証明する.

(i) $n = 1$ のとき

$$1 \log 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\log(1!) = 0$$

$$2 \log 2 - 1 = \log(4/e) > 0$$

より (*) は成り立つ.

(ii) $n = k$ で (*) が成り立つと仮定すると $n = k + 1$ のとき, まず左辺と中辺を比較すると

$$\begin{aligned} & \log((k+1)!) - (k+1) \log(k+1) + (k+1) - 1 \\ &= \log(k+1) + \log(k!) - (k+1) \log(k+1) + (k+1) - 1 \\ &\geq k \log k - k + 1 - k \log(k+1) + k \\ &= 1 - \log \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \\ &\geq 1 - \log e = 0 \\ &\therefore (k+1) \log(k+1) - (k+1) + 1 \leq \log((k+1)!) \end{aligned}$$

次に中辺と右辺を比較すると

$$\begin{aligned} & (k+2) \log(k+2) - (k+1) - \log((k+1)!) \\ &= (k+2) \log(k+2) - (k+1) - \log(k+1) - \log(k!) \\ &\geq (k+2) \log(k+2) - (k+1) - \log(k+1) - (k+1) \log(k+1) + k \\ &= (k+2) \log(k+2) - (k+2) \log(k+1) - 1 \\ &= \log \left(1 - \frac{1}{k+2} \right)^{-(k+2)} - 1 \\ &\geq \log e - 1 = 0 \\ &\therefore \log((k+1)!) \leq (k+2) \log(k+2) - (k+1) \end{aligned}$$

したがって, $n = k + 1$ についても (*) は成り立つ.(i)(ii) より自然数 n について (*) は成り立つ.

(証明終)

(2) (1) の 3 辺を $n \log n - n > 0$ で割って

$$\frac{n \log n - n + 1}{n \log n - n} \leq \frac{\log(n!)}{n \log n - n} \leq \frac{(n+1) \log(n+1) - n}{n \log n - n}$$

次に左右の極限 ($n \rightarrow \infty$) を求めると

$$\begin{aligned} \frac{n \log n - n + 1}{n \log n - n} &= 1 + \frac{1}{n(\log n - 1)} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \frac{(n+1) \log(n+1) - n}{n \log n - n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n}) \frac{\log(n+1)}{\log n} - \frac{1}{\log n}}{1 - \frac{1}{\log n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n \log n - n} = 1$$

3

(1) $n = 3$ のとき

$$a_3 \vec{v}_3 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (1, 1)$$

より $\vec{v}_3 = (\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_3})$. また

$$a_1 \vec{v}_1 = \vec{v}_3 + \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{a_3}, 1 + \frac{1}{a_3} \right) = (a_1, 0)$$

なので

$$a_3 = -1$$

(2)

$$\begin{cases} a_3 \vec{v}_3 = \vec{v}_2 + \vec{v}_4 \\ a_4 \vec{v}_4 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} (a_3 a_4 - 1) \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + a_4 \vec{v}_2 = (1, a_4) \\ (a_3 a_4 - 1) \vec{v}_4 = a_3 \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_3, 1) \end{cases} \quad (\text{A})$$

また

$$\begin{cases} a_1 \vec{v}_1 = \vec{v}_4 + \vec{v}_2 \\ a_2 \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} \vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 = (-1, a_2) \\ \vec{v}_4 = a_1 \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (a_1, -1) \end{cases} \quad (\text{B})$$

(A)(B) の 4 式を比べると

$$\begin{cases} a_3 a_4 - 1 = -1 & \implies a_3 a_4 = 0 \\ (a_3 a_4 - 1) a_1 = a_3 \\ (a_3 a_4 - 1) a_2 = a_4 \end{cases}$$

$a_1 \neq 0$ より $a_3 \neq 0$. したがって $a_4 = 0$ より

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -a_1, \quad a_4 = 0$$

(3) (2) より $a_2 = a_4 = 0$ なので $k = 1, 3$ において

$$A_k A_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_k & -1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$