

1

(1) 2つの解を $x = \alpha, \beta$ ($\alpha \leq \beta$) とすると、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = A, \quad \alpha\beta = B$$

である。ここで、2解の差 $\beta - \alpha$ は

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{A^2 - 4B}$$

と表わされる。

ここで、2解の差が1となる条件は

$$\sqrt{A^2 - 4B} = 1 \quad \therefore B = \frac{1}{4}(A+1)(A-1)$$

であるが、 A と B が $1 \leq A, B \leq 6$ の自然数であることを考慮すると、条件を満たす (A, B) の組み合わせは $(3, 2), (5, 6)$ の2組しかない。そしてその両方とも、解が実数になる条件 $A^2 - 4B > 0$ を満たす。

したがって、求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

(2) 2解の差を k とすると、(1) より

$$\sqrt{A^2 - 4B} = k \quad \therefore B = \frac{1}{4}(A+k)(A-k)$$

ここで、 $A \leq k$ の場合は $B \leq 0$ となり条件を満たさないので、 $1 \leq k < A$ の範囲で考えてよい。また、 B が整数となるために A と k の偶奇は一致する必要があることをふまえて調べると、条件を満たす (A, B, k) は

$$(A, B, k) = (3, 2, 1), (5, 6, 1), (4, 3, 2), (5, 4, 3), (6, 5, 4)$$

の5パターンしかないのである。そしてそのいずれも解が実数になる条件を満たす。

したがって、求める確率は

$$\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

(3) $f(x) = x^2 - Ax + B$ とすると、方程式 $f(x) = 0$ が実数解を持つことから

$$A^2 - 4B \geq 0$$

また、少なくとも一方の解が3より大きくなる条件は

$$f(3) = 9 - 3A + B < 0 \quad \text{または} \quad \text{軸} : x = \frac{1}{2}A > 3$$

であるが、右に書いた条件は $A > 6$ となるため満たされることはない。

以上より、与えられた条件は

$$\begin{cases} A^2 - 4B \geq 0 \\ 9 - 3A + B < 0 \end{cases}$$

と書き換えることができる。

これらを満たす (A, B) は13組あるので、求める確率は

$$\frac{13}{6^2} = \frac{13}{36}$$

2

(1)

(証明)

下2式より

$$z = \frac{5}{3}x, \quad y = 12 - x - \frac{5}{3}x = 12 - \frac{8}{3}x$$

ここで $y > 0$ なので

$$12 - \frac{8}{3}x > 0 \quad \therefore x < \frac{9}{2}$$

(2) (1) より

$$f(x) = x \cdot \frac{5}{3}x \cdot \left(12 - \frac{8}{3}x\right) = -\frac{40}{9}x^3 + 20x^2$$

$$(3) \quad f'(x) = -\frac{40}{3}x^2 + 40x = -\frac{40}{3}x(x - 3)$$

(4) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3$ より, 下記の様な増減表ができる.

x	0	...	3	...	$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	60	$\searrow$	

したがって, $xyz = f(x)$ は $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ のときに最大になる.

(1) $P(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割った余りを $ax + b$ とすると, $P(x)$ は整式 $Q(x), R(x), S(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)(x^2 - x - 2) + ax + b \\ &= R(x)(x^2 + 2x + 1) + 5x - 2 \\ &= S(x)(x^2 - 3x + 2) + 2x + 1 \end{aligned}$$

と表わすことができる. ここで

$$(x^2 - x - 2) = (x - 2)(x + 1), \quad (x^2 + 2x + 1) = (x + 1)^2, \quad (x^2 - 3x + 2) = (x - 2)(x - 1)$$

より,

$$\begin{cases} P(-1) = -a + b = -7 \\ P(2) = 2a + b = 5 \end{cases}$$

$$\therefore a = 4, b = -3$$

したがって, $P(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割った余りは

$$4x - 3$$

(2) (1) で, $R(x)$ は 2 次式なので $R(x) = cx^2 + dx + e$ とおくことができる. このとき

$$P(x) = cx^4 + (2c + d)x^3 + (c + 2d + e)x^2 + (d + 2e + 5)x + e - 2$$

なので, (1) と同様に考えて

$$\begin{cases} P(0) = e - 2 = 0 \\ P(1) = 4c + 4d + 4e + 3 = 3 \\ P(2) = 36c + 18d + 9e + 8 = 5 \end{cases}$$

$$\therefore c = \frac{5}{6}, d = -\frac{17}{6}, e = 2$$

したがって

$$P(x) = \frac{5x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 37x}{6}$$

(1)

放物線 C_1 と C_2 が共有点を持つ $\Leftrightarrow$ 方程式 $x^2 = -(x-a)^2 + 1$ が実数解を持つ

$$x^2 = -(x-a)^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

より, 求める a の範囲は

$$a^2 - 2(a^2 - 1) \geq 0$$

$$2 \geq a^2$$

$$\therefore -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

(2) 2 交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = \frac{1}{2}(a^2 - 1) \end{cases} \quad \therefore \beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{2 - a^2}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} -2(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{2}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3}(2 - a^2)^{3/2} \end{aligned}$$

(3) (2) より, $S(a)$ は $a = 0$ のときに最大値 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ をとる.