

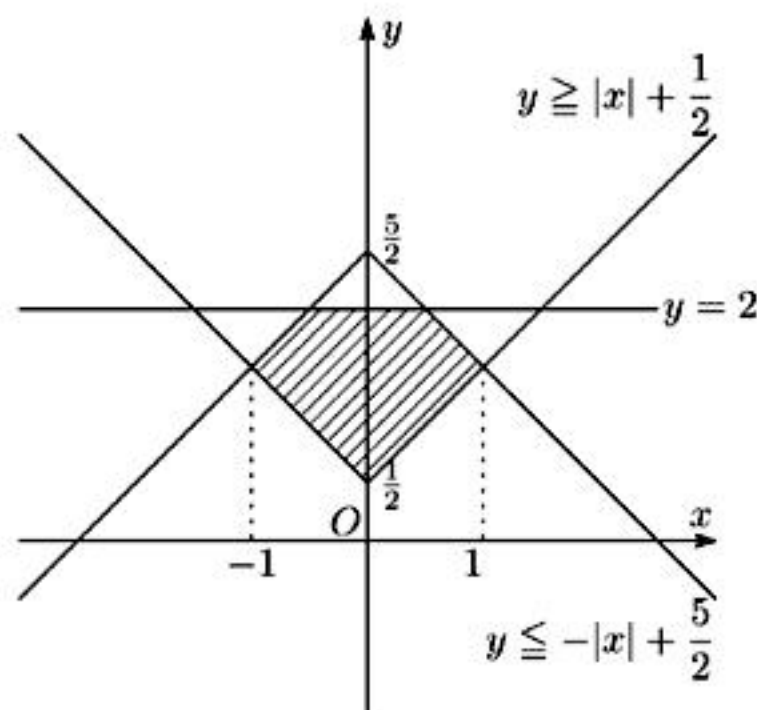
1

(1)

$a = \frac{1}{2}$ とすると、条件式は

$$\begin{cases} y \leq -|x| + \frac{5}{2} \\ y \geq |x| + \frac{1}{2} \\ y \leq 2 \end{cases}$$

となるので、 $D(\frac{1}{2})$ の領域は右図の斜線部 (境界線も含む) になる.



(2) 対称性から、 $x \geq 0$ での体積を考えて、

$$\begin{aligned} V(a) &= 2 \left(\int_0^a 2^2 \pi dx + \int_a^1 \pi(-x + a + 2)^2 dx - \int_0^1 \pi(x + a)^2 dx \right) \\ &= 2\pi \left(4a - \left[\frac{1}{3}(-x + a + 2)^3 \right]_a^1 - \left[\frac{1}{3}(x + a)^3 \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{2\pi}{3}(-a^3 - 6a^2 + 6a + 6) \end{aligned}$$

(3)

$$V'(a) = -2\pi(a^2 + 4a - 2)$$

より、 $V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -2 \pm \sqrt{6}$ なので、増減表は以下ようになる.

a	0	...	$\sqrt{6} - 2$	...	1
$V'(a)$		+	0	-	
$V(a)$	$V(0)$	$\nearrow$	$V(\sqrt{6} - 2)$	$\searrow$	$V(1)$

したがって、 $V(a)$ が最大となるのは $a = \sqrt{6} - 2$ のときである.

(1)

(i) B が 3 を出す場合,

A が勝つのは $a \geq 6$ となる場合なので, その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{26}$
 B が勝つのは $a \leq 1$ となる場合なので, その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{13} = \frac{1}{13}$

(ii) B が 6 を出す場合

A が勝つのは $a = 12$ となる場合なので, その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{26}$
 B が勝つのは $a \leq 3$ となる場合なので, その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{13} = \frac{2}{13}$

(i), (ii) より

$$p_1 = \frac{7}{26} + \frac{1}{26} = \frac{4}{13}, \quad q_1 = \frac{1}{13} + \frac{2}{13} = \frac{3}{13}$$

(2)

(i) B が $3n$ を出す場合,

A が勝つのは $a \geq 6n$ となる場合なので, その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{6n+1}{12n+1} = \frac{6n+1}{24n+2}$
 B が勝つのは $a \leq \frac{3}{2}n$ となる場合なので, その確率は $\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2}n - \frac{1}{2} + 1}{12n+1} = \frac{3n+1}{48n+4} & (n \text{ が奇数の場合}) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2}n + 1}{12n+1} = \frac{3n+2}{48n+4} & (n \text{ が偶数の場合}) \end{cases}$

(ii) B が $6n$ を出す場合

A が勝つのは $a = 12n$ となる場合なので, その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12n+1} = \frac{1}{24n+2}$
 B が勝つのは $a \leq 3n$ となる場合なので, その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{3n+1}{12n+1} = \frac{3n+1}{24n+2}$

(i), (ii) より

$$p_n = \frac{6n+1}{24n+2} + \frac{1}{24n+2} = \frac{3n+1}{12n+1}$$

$$q_n = \begin{cases} \frac{3n+1}{48n+4} + \frac{3n+1}{24n+2} = \frac{9n+3}{48n+4} & (n \text{ が奇数の場合}) \\ \frac{3n+2}{48n+4} + \frac{3n+1}{24n+2} = \frac{9n+4}{48n+4} & (n \text{ が偶数の場合}) \end{cases}$$

(3) (2) より, p_n については

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{12 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{4}$$

である. また, q_n については, n が奇数であると仮定すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + \frac{3}{n}}{48 + \frac{4}{n}} = \frac{3}{16}$$

逆に n が偶数であると仮定すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + \frac{4}{n}}{48 + \frac{4}{n}} = \frac{3}{16}$$

なので, いずれにしても

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{3}{16}$$

となる.

3

(1)

(証明)

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (ay - bx)^2 \geq 0$$

より

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

(2) (証明)

i) A が逆行列 A^{-1} を持つとすると,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので, (ア) $\Rightarrow$ (イ) が示された.

ii) 逆に, 行列 A が逆行列を持たないとすると, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書けば $ad - bc = 0$ である.

ここで条件 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を

$$\begin{cases} ax + by = 0 \cdots \textcircled{1} \\ cx + dy = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

と書き換えて考える.

$a \times \textcircled{2} - c \times \textcircled{1}$ を計算すると

$$(ad - bc)y = 0$$

となり, 任意の y がこの式を満たす.

またこのとき,

$$ax + by = 0$$

より x は $a \neq 0$ では $x = -\frac{b}{a}y$, $a = 0$ では任意の値をとることができるので, いずれの場合においても条件を満たす x, y を $x = y = 0$ に限ることはできない.

この対偶を取れば (イ) $\Rightarrow$ (ア) がいえる.

i), ii) より, 命題 (ア) と (イ) は同値である.

(3)

(証明)

方程式 $(E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ について考える.

$$\begin{cases} (1 - a)x - by = 0 \\ -cx + (1 - d)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = x \\ cx + dy = y \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} x^2 = (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ y^2 = (cx + dy)^2 \leq (c^2 + d^2)(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (\because (1))$$

両辺を足すと

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2) \\ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1)(x^2 + y^2) &\geq 0 \end{aligned}$$

ここで $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1$ より

$$x^2 + y^2 \leq 0$$

x と y は実数なので, $x = y = 0$ しかありえない. これはつまり, 問題冒頭で提起した方程式の解が $x = y = 0$ のみに限られることを示している.

したがって, (2) より $E - A$ は逆行列を持つことが示された.