

1

(1)

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(2)

(証明)

(1) より,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ \therefore (x^2+1)f''(x) + xf'(x) &= -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \end{aligned}$$

(3)

(証明)

i) (2) より, $n=1$ で

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + (2n-1)xf^{(n)}(x) + (n-1)^2f^{(n-1)}(x) = 0 \cdots (*)$$

は成り立つ.

ii) $n=k$ で $(*)$ が成り立つ, つまり

$$(x^2+1)f^{(k+1)}(x) + (2k-1)xf^{(k)}(x) + (k-1)^2f^{(k-1)}(x) = 0$$

を仮定する. この両辺を x で微分すると

$$2xf^{(k+1)}(x) + (x^2+1)f^{(k+2)}(x) + (2k-1)f^{(k)}(x) + (2k-1)xf^{(k+1)}(x) + (k-1)^2f^{(k)}(x) = 0$$

$$\therefore (x^2+1)f^{(k+2)}(x) + (2k+1)xf^{(k+1)}(x) + k^2f^{(k)}(x) = 0$$

これはつまり $n=k+1$ においても $(*)$ が成り立つことを示している.

i), ii) から, 帰納的に

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + (2n-1)xf^{(n)}(x) + (n-1)^2f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成り立つことが示された.

(4) (3) において, $x=0$ を代入すると

$$f^{(n+1)}(0) + (n-1)^2f^{(n-1)}(0) = 0$$

$$\therefore f^{(n+2)}(0) = -n^2f^{(n)}(0) \quad (n \geq 0)$$

という漸化式ができる. また, (1), (2) から

$$f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) = 1$$

なので,

$$f^{(9)}(0) = -7^2f^{(7)} = 7^2 \cdot 5^2f^{(5)}(0) = -7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2f^{(3)}(0) = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2f^{(1)}(0) = 11025$$

$$f^{(10)}(0) = 8^2 \cdot 6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2f^{(2)}(0) = 0$$

2

$$(1) \overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{EQ} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{ER} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ より}$$

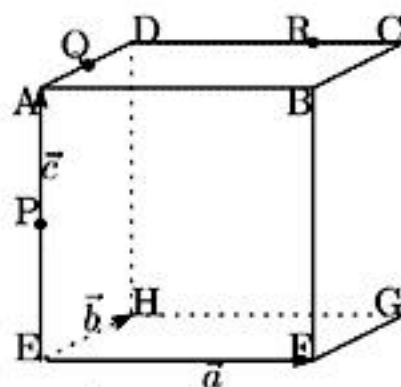
$$\overrightarrow{QP} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \overrightarrow{QR} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$(2) |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{QP}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore |\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\overrightarrow{QR}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = \frac{25}{36} \quad \therefore |\overrightarrow{QR}| = \frac{5}{6}$$

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = -\frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = -\frac{1}{4}$$



以上より

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}| |\overrightarrow{QR}|} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{6}} = -\frac{3\sqrt{2}}{10}$$

(3) 点 E から平面 X に下ろした垂線の足を I とし,

$$\overrightarrow{QI} = s\overrightarrow{QP} + t\overrightarrow{QR}$$

$$\therefore \overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}t\vec{a} + \left(\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right)\vec{b} + \left(1 - \frac{s}{2}\right)\vec{c}$$

とすると, $\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{QR}$ より

$$\begin{cases} \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{QP} = -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{2}\right) = 0 \\ \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{QR} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}t + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{66}{41}, t = \frac{9}{41}$$

したがって,

$$\overrightarrow{EI} = \frac{6}{41}\vec{a} - \frac{8}{41}\vec{b} + \frac{8}{41}\vec{c}$$

より, 求める距離 l は

$$l = |\overrightarrow{EI}| = \frac{\sqrt{6^2 + 8^2 + 8^2}}{41} = \frac{2\sqrt{41}}{41}$$

(1)

(証明)

$x^2 + y^2 < n^2$ より, $0 < y < \sqrt{n^2 - x^2}$ である. また, 関数 $[x]$ は, x が整数ならば $x - 1$ を, そうでなければ x の整数部分を表す関数だとすると, $0 < y < \sqrt{n^2 - x^2}$ を満たす整数 y は $[\sqrt{n^2 - x^2}]$ 個ある.

したがってこの関数を使うと

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} [\sqrt{n^2 - k^2}]$$

と表すことができる. また, $[x]$ の定義から

$$x - 1 \leq [x] < x$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 - k^2} - 1 &\leq [\sqrt{n^2 - k^2}] < \sqrt{n^2 - k^2} \\ \therefore \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{n^2 - k^2} - 1) &\leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2} \end{aligned}$$

(2)

(証明)

(1) より

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{n^2 - k^2} - 1) \leq \frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$$

が成り立つ. また,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{n^2 - k^2} - 1) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} - \frac{1}{n} \right) \\ &\rightarrow \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} \\ &\rightarrow \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より, はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2} = \frac{\pi}{4}$$