

(1)

並べる 7 文字のうち、U が 2 つあり、他は全て異なる文字なので、求める場合の数は、

$$\frac{7!}{2!} = 2520 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 2520 通り

(2)

@を固定し、残りの 6 文字の並び替えと考えればよいので、求める場合の数は、

$$\frac{6!}{2!} = 360 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 360 通り

(3)

U がくる位置の組み合わせは、2 番目と 4 番目、4 番目と 6 番目、2 番目と 6 番目の 3 通りがある。それぞれに対して、他の 5 文字を並べる場合の数は、5!通りとなるので、求める場合の数は、

$$3 \cdot 5! = 360 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 360 通り

(4)

U の 2 文字が隣り合うときは、2 個の U を 1 文字とみなして考えることができ、その場合の数は、

$$6! = 720 \text{ (通り)}$$

となる。したがって、求める場合の数は全体からこの数を引いたもので、

$$2520 - 720 = 1800 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 1800 通り

(1)

真数条件より、 $x > 0$ である。与えられた方程式を変形すると、

$$\log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = 2(\log_2 x) \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x - \frac{1}{3} \log_2 x = (\log_2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \frac{2}{3} \log_2 x = 0$$

となる。 $X = \log_2 x$ とすると、

$$X^2 - \frac{2}{3} X = 0$$

$$\Leftrightarrow X \left(X - \frac{2}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 0, \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 1, \sqrt[3]{4}$$

となる。

(答) $x = 1, \sqrt[3]{4}$

(2)

x, y が自然数であることにより、真数条件は全て満たされる。条件より、

$$\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10} (y + 2x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow xy = y + 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x(2x - y) + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x - y + 2) - 2x + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x - y + 2) - (2x - y + 2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (2x - y + 2)(x - 1) = -3$$

となる。 x, y はともに自然数なので、 $2x - y + 2, x - 1$ はともに整数となる。よって、

$$(2x - y + 2, x - 1) = (-1, 3), (-3, 1), (3, -1), (1, -3)$$

となる。これらのうち、 x, y がともに自然数となる解は、

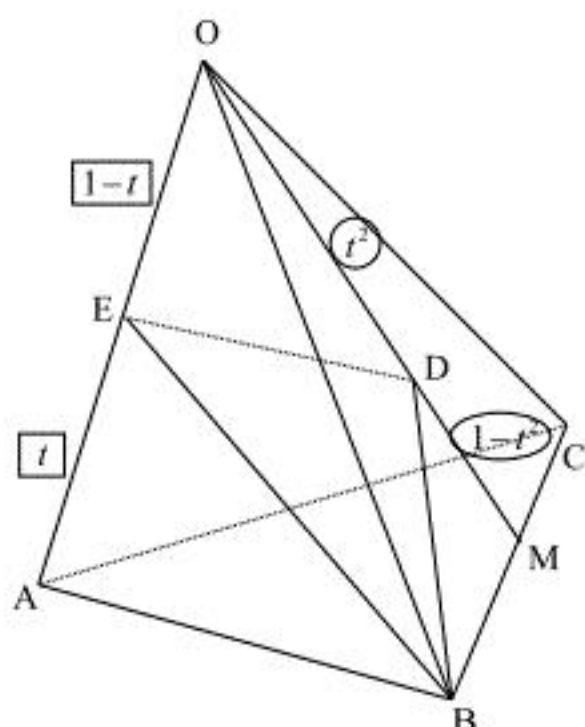
$$(x, y) = (4, 11), (2, 9)$$

である。

(答) $(x, y) = (4, 11), (2, 9)$

3

(1)



$\triangle OBC$, $\triangle ABC$ はいずれも正三角形であり、点 M は辺 BC の中点なので、
 $OM \perp BC$, $AM \perp BC$
 となる。したがって、点 B から $\triangle OAM$ へ下ろした垂線の足は点 M となるので、その垂線の長さは $\frac{1}{2}$ となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

求める面積を $S(t)$ とすると、条件より、

$$S(t) = t^2(1-t) \cdot \triangle OAM$$

となる。

ここで、 OA の中点を N とすると

$$\triangle OAM = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot MN$$

$$OA = 1, MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

より、 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= t^2(1-t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} t^2(1-t) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{\sqrt{2}}{4} t^2(1-t)$

(3)

(1), (2) より、四面体 $BODE$ は底面が $\triangle ODE$ 、高さは $BM \left(= \frac{1}{2} \right)$ とみなすことができるから

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{3} S(t) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{24} t^2(1-t) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$V'(t) = \frac{\sqrt{2}}{24} t(2-3t)$$

となり、増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$\frac{2}{3}$	...	(1)
$V'(t)$		+	0	-	
$V(t)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{162}$	$\searrow$	(0)

これより、 $V(t)$ は $t = \frac{2}{3}$ のとき、最大値 $\frac{\sqrt{2}}{162}$ をとることがわかる。

(答) $t = \frac{2}{3}$, 最大値: $\frac{\sqrt{2}}{162}$

$a+8b=0$ とすると

$$f(x) = -8bx + b$$

となる。 $f(x)$ は直線なので、満たすべき条件は

$$\begin{cases} f(0) = b > 0 \\ f(1) = -7b > 0 \end{cases}$$

となるが、この条件を満たす点 (a, b) は存在しないため、以降は $a+8b \neq 0$ として考える。このとき、2 次関数 $f(x)$ を平方完成すると

$$f(x) = (a+8b) \left(x - \frac{4b}{a+8b} \right)^2 + \frac{ab-8b^2}{a+8b}$$

となる。

[1] $\frac{4b}{a+8b} < 0$ または $1 < \frac{4b}{a+8b}$ のとき

軸は $0 \leq x \leq 1$ の範囲に入っていないので、 $0 \leq x \leq 1$ では $f(x)$ は単調に増加、または減少する。よって、満たすべき条件は

$$\begin{cases} f(0) = b > 0 \\ f(1) = a+b > 0 \end{cases}$$

である。

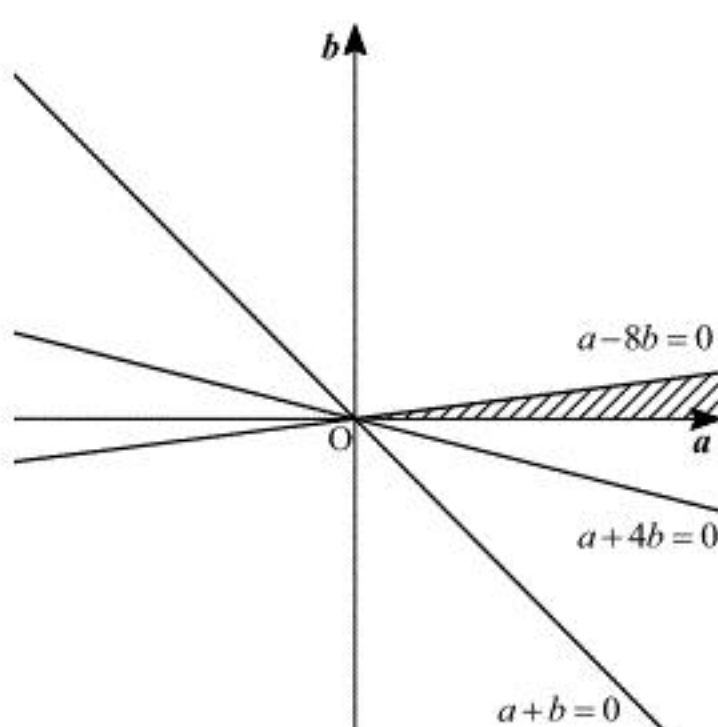
[2] $0 \leq \frac{4b}{a+8b} \leq 1$, つまり $0 \leq 4b \leq a+8b$ または $a+8b \leq 4b \leq 0$ のとき

軸が $0 \leq x \leq 1$ の範囲に入っているので、満たすべき条件は

$$\begin{cases} f(0) = b > 0 \\ f\left(\frac{4b}{a+8b}\right) = \frac{(a-8b)b}{a+8b} > 0 \Leftrightarrow a-8b > 0 \\ f(1) = a+b > 0 \end{cases}$$

となる。

[1], [2] より、求める領域は下図の斜線部となる。ただし、境界はすべて含まない。



(答) 前図, 境界はすべて含まない