

(1)

(a, b) の組み合わせは全部で $2n(2n-1)$ 通りある。そのうち、 $2a=b$ または、 $a=2b$ となるのは、 $(a, b) = (k, 2k), (2k, k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) となるときで、全部で $2n$ 通りある。よって、求める確率は

$$\frac{2n}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2n-1}$$

(2)

$a=k$ となる確率は $\frac{1}{2n}$ であり、このとき $a \geq b$ となる確率は $\frac{k-1}{2n-1}$ となる。よって、求める確率は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{k-1}{2n-1} &= \frac{1}{2n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k \\ &= \frac{1}{2n(2n-1)} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2n(2n-1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

(3)

$a=k$ ($1 \leq k \leq n$) のとき、 $2a \geq b$ となる確率は、 $\frac{2k-1}{2n-1}$ である。 $a=k$ ($n+1 \leq k \leq 2n$) のとき、 b がどのような値でも $2a \geq b$ となり、確率は1である。よって、求める確率は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 &= \frac{1}{2n(2n-1)} \{n(n+1)-n\} + \frac{1}{2n} \cdot n \\ &= \frac{n}{2(2n-1)} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3n-1}{4n-2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3n-1}{4n-2}$$

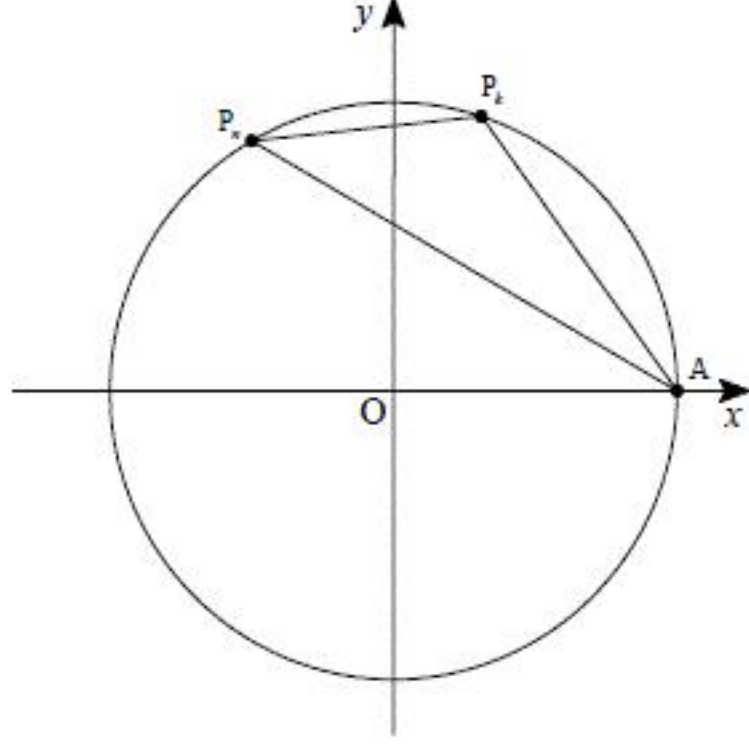
2

(1)

原点をOとする。

[1] $0 \leq t \leq \pi$ のとき

グラフは以下になる。



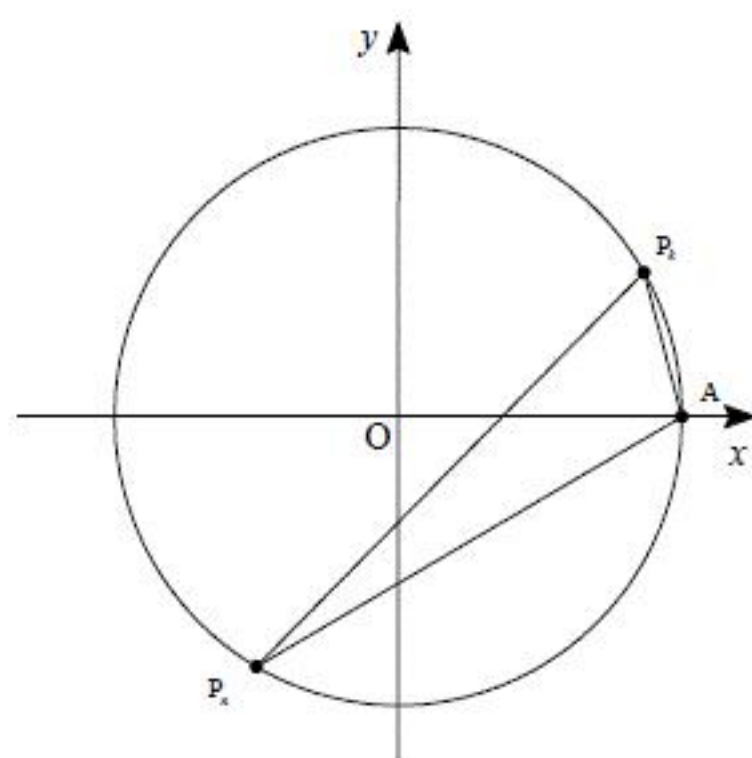
よって、

$$\begin{aligned} S(t) &= \triangle OAP_k + \triangle OP_k P_n - \triangle OAP_n \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \frac{kt}{n} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin t \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{kt}{n} + \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t - \sin t \right\} \end{aligned}$$

である。

[2] $\pi < t \leq 2\pi$ かつ $0 < \frac{kt}{n} \leq t - \pi$ のとき

グラフは以下になる。



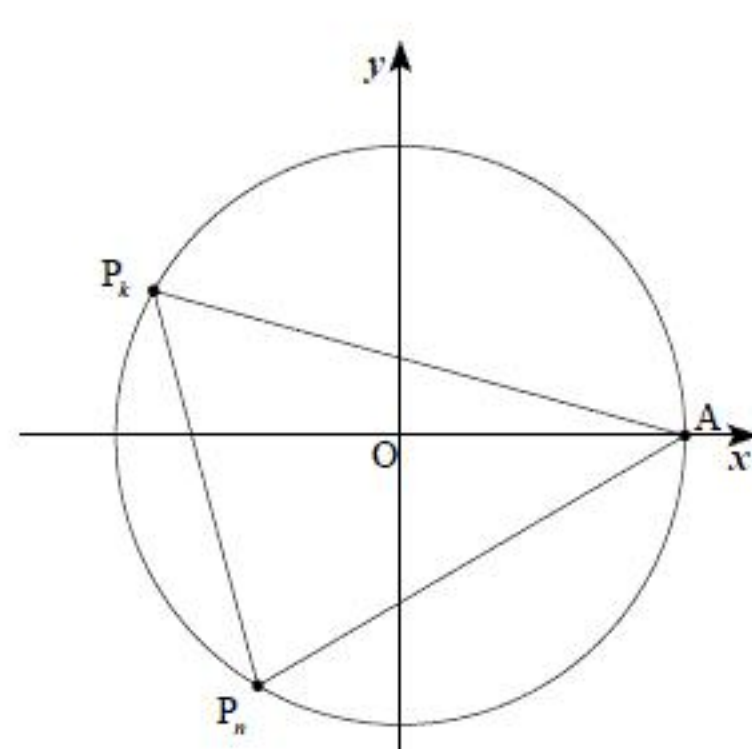
よって、

$$\begin{aligned} S(t) &= \triangle OAP_k + \triangle OAP_n - \triangle OP_k P_n \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \frac{kt}{n} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-\sin t) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \left\{2\pi - \left(t - \frac{kt}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{kt}{n} + \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t - \sin t \right\} \end{aligned}$$

である。

[3] $\pi < t \leq 2\pi$ かつ $t - \pi < \frac{kt}{n} \leq \pi$ のとき

グラフは以下になる。



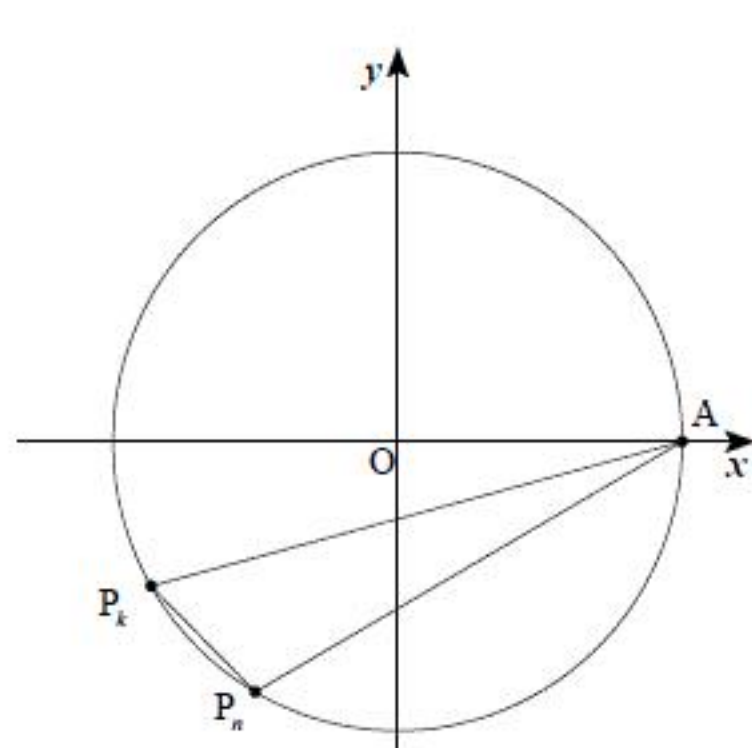
よって、

$$\begin{aligned} S(t) &= \triangle OAP_k + \triangle OAP_n + \triangle OP_k P_n \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \frac{kt}{n} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\sin \frac{kt}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{kt}{n} + \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t - \sin t \right\} \end{aligned}$$

である。

[4] $\pi < t \leq 2\pi$ かつ $\pi < \frac{kt}{n} < t$ のとき

グラフは以下になる。



よって、

$$\begin{aligned} S(t) &= \triangle OAP_n + \triangle OP_k P_n - \triangle OAP_k \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-\sin t) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\sin \frac{kt}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{kt}{n} + \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t - \sin t \right\} \end{aligned}$$

である。

以上[1]~[4]より、 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{kt}{n} + \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t - \sin t \right\}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad S(t) = \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{kt}{n} + \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t - \sin t \right\}$$

(2)

区分求積法を用いると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{kt}{n} + \sin \left(1 - \frac{k}{n}\right)t - \sin t \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin xt + \sin(1-x)t - \sin t) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin xt dx + \frac{1}{2} \int_1^0 -\sin y t dy - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin t dx \quad (y=1-x) \\ &= \int_0^1 \sin xt dx - \frac{1}{2} \sin t \\ &= \left[\frac{-\cos xt}{t} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \sin t \\ &= \frac{1 - \cos t}{t} - \frac{1}{2} \sin t \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(t) = \frac{1 - \cos t}{t} - \frac{1}{2} \sin t$$

(3)

(2)の値を代入して、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} t f(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos t - \frac{1}{2} t \sin t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt - \frac{1}{2} \left\{ [-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt \right\} \\ &= [t - \sin t]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \left\{ -2\pi + [\sin t]_0^{2\pi} \right\} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I = 3\pi$$

3

(1)

与えられた漸化式は,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と変形できるので,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

(答) $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$

(2)

問題文の漸化式より

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\det T = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 1 \neq 0$$

より, T^{-1} が存在し,

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= TA \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= TAT^{-1} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} B &= TAT^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(答) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3)

$\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ と, B が対角行列であることを用いて,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} &= B^{n-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^n \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$c_n = 5^n, d_n = -\sqrt{3}$$

である。

(答) $c_n = 5^n, d_n = -\sqrt{3}$

(4)

(3)の結果と①式を用いて,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (5^n + 1)\sqrt{3} \\ 5^n - 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$a_n = \frac{\sqrt{3}(5^n + 1)}{2}, b_n = \frac{5^n - 3}{2}$$

である。

(答) $a_n = \frac{\sqrt{3}(5^n + 1)}{2}, b_n = \frac{5^n - 3}{2}$