

1

(1)

(証明)

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) &= 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{\pi - x}{2} \\
 &= 4 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \\
 &= \sin x + \sin x \\
 &= \sin x + \sin(\pi - x) \\
 &= \sin x + \sin y = (\text{左辺})
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

(2)

(証明)  $z = \pi - x - y$  なので

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) &= 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{\pi - x - y}{2} \\
 &= 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x + y}{2} \\
 &= 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \left( \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right) \\
 &= 4 \left( \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos^2 \frac{y}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} \right) \\
 &= \sin x (\cos y + 1) + \sin y (\cos x + 1) \\
 &= \sin(x + y) + \sin x + \sin y \\
 &= \sin x + \sin y + \sin z = (\text{左辺})
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

(3)

(証明)  $x = \pi, y = z = \frac{\pi}{3}, w = -\frac{2}{3}\pi$  のとき

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z + \sin w = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} \cos \frac{w}{2} = 0 \end{cases}$$

となり

$$\sin x + \sin y + \sin z + \sin w \neq 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} \cos \frac{w}{2}$$

なので、この反例から与式は必ずしも成り立たないことが示された。

Q.E.D.

(1) 点と直線の距離の公式から

$$f(t) = \frac{|-1|}{\sqrt{(ae^t)^2 + (be^{-t})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(ae^t)^2 + (be^{-t})^2}}$$

(2)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{f(t)^2} dt = \int_0^1 \{(ae^t)^2 + (be^{-t})^2\} dt \\ &= \int_0^1 (a^2 e^{2t} + b^2 e^{-2t}) dt \\ &= \frac{a^2(e^2 - 1) - b^2(e^{-2} - 1)}{2} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 e^{-2})(e^2 - 1)}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \frac{(a^2 + b^2 e^{-2})(e^2 - 1)}{2} \\ &\geq (e^2 - 1) \sqrt{a^2 b^2 e^{-2}} \quad (\because a^2 > 0, b^2 e^{-2} > 0, e^2 - 1 > 0) \\ &= \frac{e^2 - 1}{e} \end{aligned}$$

なので、 $a^2 = b^2(e)^{-2}$  つまり  $a = e^{-1/2}$ ,  $b = e^{1/2}$  のときに最小値  $\frac{e^2 - 1}{e}$  をとる。

(1)

(証明)

$n+k \leq m+1$  を満たす  $n, k$  について  $a_n^{(k)} = 1$  である (\*) ことを示すことで  $a_m^{(1)} = 1$  を示す。

(i)  $n+k=2$  のとき、つまり  $n=k=1$  のとき  $a_1^{(1)} = 1$  なので (\*) は成り立つ。

(ii)  $n+k \leq j$  ( $j \leq m$ ) を満たす  $n, k$  について (\*) が成り立つことを仮定すると

$$a_{j-1}^{(1)} = a_{j-2}^{(2)} = \cdots = a_1^{(j-1)} = 1$$

となっている。したがって  $a_{n+1}^{(k)}$  の定義から

$$a_j^{(1)} = a_{j-1}^{(2)} = \cdots = a_1^{(j)} = 1$$