

(1)

求める単位ベクトルを

$$\vec{e} = (a, b, c)$$

と置く。これが $\overline{CA}$ と $\overline{CB}$ に垂直なので、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \vec{e} \cdot \overline{CA} = 0 \\ \vec{e} \cdot \overline{CB} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, -2, -4) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2c = 0 \\ -2b - 4c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

より、 $\vec{e}$ は実数 c を用いて、

$$\vec{e} = (2c, -2c, c)$$

と表すことが出来る。ここで、 $|\vec{e}| = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} 9c^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\vec{e} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

(2)

P は直線 DE 上にあるので、実数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OD} + k\overline{DE} \\ &= (0, 1, 2) + k(2, -6, -2) \\ &= (2k, 1-6k, 2-2k) \end{aligned}$$

と表すことが出来る。また、P は平面 ABC 上にあるので、実数 α, β を用いて、

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OC} + \alpha\overline{CA} + \beta\overline{CB} \\ &= (1, 1, 7) + \alpha(1, 0, -2) + \beta(0, -2, -4) \\ &= (1+\alpha, 1-2\beta, 7-2\alpha-4\beta) \end{aligned}$$

と表すこともできる。

以上から、

$$\begin{cases} 1+\alpha = 2k \\ 1-2\beta = 1-6k \\ 7-2\alpha-4\beta = 2-2k \end{cases}$$

であるから、

$$k = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{3}{2}$$

を得る。よって、

$$P(1, -2, 1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (1, -2, 1)$$

(3)

PQ は平面 ABC に垂直なので、実数 ℓ を用いて、

$$\overline{PQ} = \ell \vec{e}$$

と置ける。ここで、 $|\overline{PQ}| = |\ell|$ であることに注意する。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \ell \vec{e} \\ &= (1, -2, 1) + \left(\frac{2}{3}\ell, -\frac{2}{3}\ell, \frac{1}{3}\ell \right) \\ &= \left(1 + \frac{2}{3}\ell, -2 - \frac{2}{3}\ell, 1 + \frac{1}{3}\ell \right) \end{aligned}$$

であり、ここで、Q は xy 平面上の点であったので、

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3}\ell &= 0 \\ \Leftrightarrow \ell &= -3 \end{aligned}$$

である。よって、PQ の長さは 3 である。

$$(\text{答}) \quad 3$$

(1)

$$\begin{cases} 3^x = a \\ 12^y = a \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} x = \frac{\log a}{\log 3} \\ y = \frac{\log a}{\log 12} \end{cases}$$

である。これを $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ に代入して,

$$\begin{aligned} \frac{\log 3}{\log a} + \frac{\log 12}{\log a} &= 2 \\ \Leftrightarrow \log 3 + \log 3 + 2 \log 2 &= 2 \log a \\ \Leftrightarrow \log a &= \log 2 + \log 3 \\ \Leftrightarrow \log a &= \log 6 \\ \Leftrightarrow a &= 6 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $a = 6$

(2)

b, c は正の実数なので, $\frac{c}{b} > 0$ である必要がある。与式より,

$$(\log_2 z - \log_2 b)(\log_2 z - \log_2 c) + 1 = 0$$

である。ここで,

$$\log_2 z = Z, \log_2 b = B, \log_2 c = C$$

とすると, Z, B, C の範囲は全実数であり,

$$Z^2 - (B+C)Z + BC + 1 = 0$$

を得る。これを満たす実数 Z が存在する条件は, この方程式を Z の 2 次方程式と見たときの判別式が 0 以上であることより,

$$\begin{aligned} D &= (B+C)^2 - 4BC - 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow B^2 - 2BC + C^2 - 4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (C-B+2)(C-B-2) &\geq 0 \end{aligned}$$

である。ここで,

$$C-B = \log_2 \frac{c}{b}$$

であるので,

$$\begin{aligned} (C-B+2)(C-B-2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\log_2 \frac{c}{b} + 2 \right) \left(\log_2 \frac{c}{b} - 2 \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{c}{b} \leq -2, 2 \leq \log_2 \frac{c}{b} \\ \Leftrightarrow \frac{c}{b} \leq \frac{1}{4}, 4 \leq \frac{c}{b} \end{aligned}$$

を得る。 $\frac{c}{b} > 0$ と合わせて,

$$0 < \frac{c}{b} \leq \frac{1}{4}, 4 \leq \frac{c}{b}$$

である。

(答) $0 < \frac{c}{b} \leq \frac{1}{4}, 4 \leq \frac{c}{b}$

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x(x-a)dx &= [xe^x - e^x - ax^x]_0^1 \\ &= -ae + 1 + a\end{aligned}$$

(答) $-ae + 1 + a$

(2)

 a の値で場合わけをして、被積分関数の絶対値記号をはずす。[1] $a < 0$ のとき

$$x - a > 0$$

なので、

$$\begin{aligned}f(a) &= \int_0^1 e^x(x-a)dx \\ &= -(e-1)a + 1\end{aligned}$$

である。

[2] $0 \leq a \leq 1$ のとき

$$0 \leq x < a \text{ で } x - a < 0$$

$$a \leq x \leq 1 \text{ で } x - a \geq 0$$

なので、

$$\begin{aligned}f(a) &= -\int_0^a e^x(x-a)dx + \int_a^1 e^x(x-a)dx \\ &= [xe^x - e^x - ae^x]_a^0 + [xe^x - e^x - ae^x]_a^1 \\ &= 2e^a - ea - a - 1\end{aligned}$$

である。

[3] $1 \leq a$ のとき

$$x - a \leq 0$$

なので、

$$\begin{aligned}f(a) &= -\int_0^1 e^x(x-a)dx \\ &= (e-1)a - 1\end{aligned}$$

である。

以上より、

$$f(a) = \begin{cases} -(e-1)a + 1 & (a < 0) \\ 2e^a - ea - a - 1 & (0 \leq a < 1) \\ (e-1)a - 1 & (1 \leq a) \end{cases}$$

である。

$$(答) \quad f(a) = \begin{cases} -(e-1)a + 1 & (a < 0) \\ 2e^a - ea - a - 1 & (0 \leq a < 1) \\ (e-1)a - 1 & (1 \leq a) \end{cases}$$

(3)

(2)の結果から、 $f(a)$ は全実数で連続であることが分かる。次に、 $0 \leq a \leq 1$ で $f(a)$ について考える。

$$f'(a) = 2e^a - e - 1$$

これより、 $f'(a)$ は増加関数であることが分かり、さらに、

$$\begin{cases} f'(0) = 1 - e < 0 \\ f'(1) = e - 1 > 0 \end{cases}$$

であるので、 $f'(a) = 0$ を満たす a が $0 < a < 1$ に存在し、

$$\begin{cases} f'(a) < 0 & (0 < a < \alpha) \\ f'(a) > 0 & (\alpha < a < 1) \end{cases}$$

最後に、 $a < 0$ 、 $1 < a$ では、 $f(a)$ はそれぞれ傾きが負、正の一次関数であるので、 $y = f(a)$ の増減表として以下の表を得る。

a	...	α	...
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$\searrow$	最小	$\nearrow$

これより、 $a = \alpha$ で $f(a)$ は最小となり、

$$\begin{aligned}f'(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2e^\alpha - e - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^\alpha &= \frac{e+1}{2} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \log \frac{e+1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\log \frac{e+1}{2}$