

(1)

題意より,

$$a_{3n-2}=1, \quad a_{3n-1}=2, \quad a_{3n}=0 \quad (n \text{ は自然数})$$

である。

与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 + 2a_2^2 \\ &= 1 + 8 \\ &= 9 \end{aligned}$$

であり, 同様にして,

$$\begin{aligned} b_3 &= b_2 + 3a_3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

である。

(答) $b_2 = 9, \quad b_3 = 9$

(2)

$$\begin{aligned} b_{3(n+1)} &= b_{(3n+2)+1} \\ &= b_{3n+2} + (3n+3) \cdot a_{3n+3}^2 \\ &= b_{3n+2} \\ &= b_{(3n+1)+1} \\ &= b_{3n+1} + (3n+2) \cdot a_{3n+2}^2 \\ &= b_{(3n)+1} + 4(3n+2) \\ &= b_{3n} + (3n+1) \cdot a_{3n+1}^2 + 4(3n+2) \\ &= b_{3n} + 15n + 9 \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(3)

(2)より, $k \geq 2$ として,

$$\begin{aligned} b_{3k} &= b_3 + \sum_{n=1}^{k-1} (15n+9) \\ &= 9 + \frac{15}{2}k(k-1) + 9(k-1) \\ &= \frac{15(k-1)k}{2} + 9k \end{aligned}$$

である。これは $k=1$ でも成り立つ。

(証明終)

(4)

$\frac{1}{2}(k-1)k$ は整数となることから, (3)より, b_{3k} は 3 の倍数である。

次に, $n=3k+1$ のときについて考える。 $k \geq 1$ として,

$$\begin{aligned} b_{3k+1} &= b_{3k} + (3k+1) \cdot a_{3k+1}^2 \\ &= b_{3k} + 3k + 1 \end{aligned}$$

であり, b_{3k} は 3 の倍数であるから, b_{3k+1} は 3 で割ると 1 余る。

これは $k=0$, つまり b_1 についても成り立つ。次に, $n=3k+2$ のときについて考える。

$$\begin{aligned} b_{3k+2} &= b_{3k+1} + (3k+2) \cdot a_{3k+2}^2 \\ &= b_{3k+1} + 12k + 8 \end{aligned}$$

ここで,

$$b_{3k+1} = 3l + 1 \quad (l \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表すことができるから,

$$\begin{aligned} b_{3k+2} &= 3l + 1 + 12k + 8 \\ &= 3(l + 4k + 3) \end{aligned}$$

より, b_{3k+2} は 3 の倍数である。以上から, b_n が 3 で割り切れないのは, n を 3 で割った余りが 1 であることが示された。

(証明終)

(1)

取り出し方は全部で

$$10^3 = 1000 \text{ (通り)}$$

であり、題意を満たす取り出し方は、

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{720}{1000} = \frac{18}{25}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{18}{25}$$

(2)

a, b, c が全て 7 以下であればよく、そのような取り出し方は、

$$7^3 = 343 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{343}{1000}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{343}{1000}$$

(3)

a, b, c が全て 6 以下であるような取り出し方は、

$$6^3 = 216 \text{ (通り)}$$

である。よって、最大値が 7 となるような取り出し方は、

$$343 - 216 = 127 \text{ (通り)}$$

であるので、求める確率は、

$$\frac{127}{1000}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{127}{1000}$$

(4)

和が 10 となる数字の組は、

$$(1, 1, 8), (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5),$$

$$(2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$$

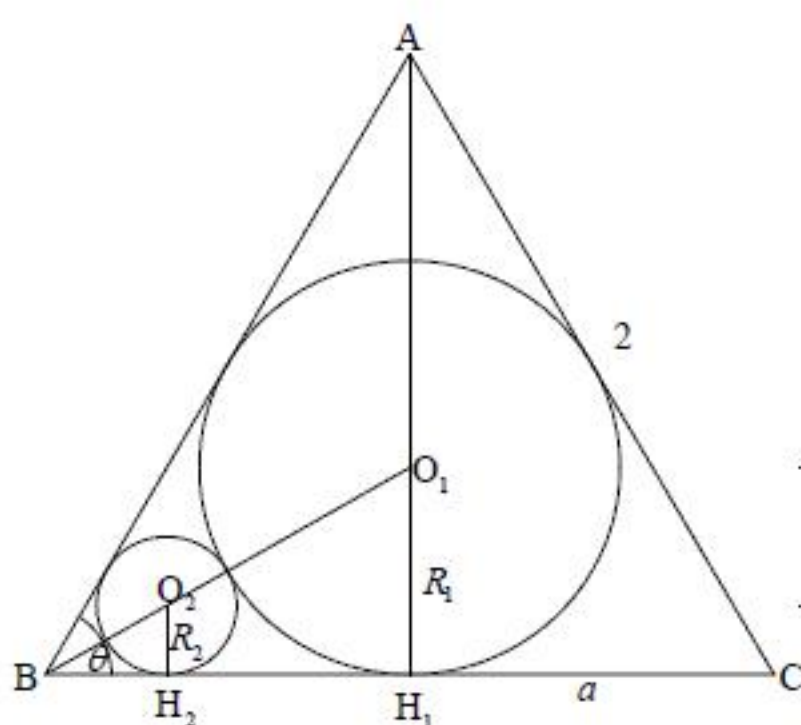
がある。それぞれの組み合わせが実現するような取り出し方を考え、求める確率は、

$$\frac{36}{1000} = \frac{9}{250}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{9}{250}$$

(1)



上図のように、点 H_1 , H_2 , O_1 , O_2 を定め、

$$\angle O_1BC = \angle O_1BA = \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

と置く。三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AH_1 &= \sqrt{AB^2 - BH_1^2} \\ &= \sqrt{4 - a^2} \end{aligned}$$

であるから、三角形 ABC の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH_1 \\ &= a\sqrt{4 - a^2} \end{aligned}$$

である。また、 S は、

$$S = \frac{1}{2} R_1 (AB + BC + CA)$$

とも表すことができるので、

$$\begin{aligned} a\sqrt{4 - a^2} &= \frac{1}{2} R_1 (4 + 2a) \\ \Leftrightarrow R_1 &= \frac{a\sqrt{4 - a^2}}{a + 2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{a\sqrt{4 - a^2}}{a + 2}$

(2)

上図より、

$$\cos 2\theta = \frac{a}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2 - a}}{2} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} O_1O_2 \sin \theta &= O_1H_1 - O_2H_2 \\ \Leftrightarrow (R_1 + R_2) \sin \theta &= R_1 - R_2 \\ \Leftrightarrow \frac{R_2}{R_1} &= \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{R_2}{R_1} &= \frac{2 - \sqrt{2 - a}}{2 + \sqrt{2 - a}} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2 - \sqrt{2 - a}}{2 + \sqrt{2 - a}}$