

(1)

 $S=7$ となるような 3 つの数字の組み合わせ、及びそれらが出る順番の数は、

$$\{1, 1, 5\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

$$\{1, 2, 4\} \quad \cdots 6 \text{ 通り}$$

$$\{1, 3, 3\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

$$\{2, 2, 3\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

であるから、

$$p(S=7) = \frac{3+6+3+3}{6^3} = \frac{5}{72}$$

となる。

(答) $\frac{5}{72}$

(2)

 $S=3$ となるような 3 つの数字の組み合わせ、及びそれらが出る順番の数は、

$$\{1, 1, 1\} \quad \cdots 1 \text{ 通り}$$

である。

 $S=4$ となるような 3 つの数字の組み合わせ、及びそれらが出る順番の数は、

$$\{1, 1, 2\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

である。

 $S=5$ となるような 3 つの数字の組み合わせ、及びそれらが出る順番の数は、

$$\{1, 1, 3\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

$$\{1, 2, 2\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

であり、合計で 6 通りである。

 $S=6$ となるような 3 つの数字の組み合わせ、及びそれらが出る順番の数は、

$$\{1, 1, 4\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

$$\{1, 2, 3\} \quad \cdots 6 \text{ 通り}$$

$$\{2, 2, 2\} \quad \cdots 1 \text{ 通り}$$

であり、合計で 10 通りである。

以上より、

$$\begin{aligned} p(S \geq 7) &= 1 - p(S < 7) \\ &= 1 - \frac{1+3+6+10}{6^3} \\ &= 1 - \frac{5}{54} \\ &= \frac{49}{54} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{49}{54}$

(3)

 $S=16$ となるような 3 つの数字の組み合わせ、及びそれらが出る順番の数は、

$$\{4, 6, 6\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

$$\{5, 5, 6\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

であり、合計で 6 通りである。

 $S=17$ となるような 3 つの数字の組み合わせ、及びそれらが出る順番の数は、

$$\{5, 6, 6\} \quad \cdots 3 \text{ 通り}$$

である。

 $S=18$ となるような 3 つの数字の組み合わせ、及びそれらが出る順番の数は、

$$\{6, 6, 6\} \quad \cdots 1 \text{ 通り}$$

である。

(2) も合わせて、

$$p(S \leq 5 \text{ または } S \geq 16) = \frac{1+3+6+6+3+1}{6^3} = \frac{5}{54}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} p(6 \leq S \leq 15) &= 1 - p(S \leq 5 \text{ または } S \geq 16) \\ &= 1 - \frac{4}{54} \\ &= \frac{49}{54} \end{aligned}$$

である。したがって得られる賞金の期待値は、

$$3000 \cdot \frac{5}{54} + 300 \cdot \frac{49}{54} = 550$$

となる。

(答) 550 円

(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \theta \\
 &= \sqrt{17} \cdot \sqrt{10} \cdot \left(-\frac{13}{\sqrt{170}} \right) \\
 &= -13
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 |\vec{u}|^2 &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 = \frac{1}{4} \{17 + 10 + 2 \cdot (-13)\} = \frac{1}{4} \\
 \therefore |\vec{u}| &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{v}|^2 &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 = \frac{1}{4} \{17 + 10 - 2 \cdot (-13)\} = \frac{53}{4} \\
 \therefore |\vec{v}| &= \frac{\sqrt{53}}{2}
 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \\
 &= \frac{1}{4} (|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2) \\
 &= \frac{1}{4} (17 - 10) \\
 &= \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\vec{u}| = \frac{1}{2}, \quad |\vec{v}| = \frac{\sqrt{53}}{2}, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{7}{4}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{OP}|^2 &= |t\vec{u} + (1-t)\vec{v}|^2 \\
 &= t^2 |\vec{u}|^2 + 2t(1-t)\vec{u} \cdot \vec{v} + (1-t)^2 |\vec{v}|^2 \\
 &= \frac{1}{4} t^2 + \frac{14}{4} (t - t^2) + \frac{53}{4} (1 - 2t + t^2) \\
 &= \frac{1}{4} (40t^2 - 92t + 53) \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ 40 \left(t - \frac{23}{20} \right)^2 + \frac{1}{10} \right\}
 \end{aligned}$$

であるから、 $t = \frac{23}{20}$ で $|\overrightarrow{OP}|^2$ は最小、つまり $|\overrightarrow{OP}|$ は最小となり、その値は、

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\frac{1}{40}} = \frac{\sqrt{10}}{20}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{23}{20} \text{ のとき } |\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{10}}{20}$$

(1)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

である。また、

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}} = -\frac{c}{d}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}, \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d}$$

(2)

 $P(x)=0$ は x の 3 次方程式であるから、少なくとも 1 つは実数解を持つ。ここでは $x=\gamma (\neq 0)$

が実数であるとする。

 $\alpha = p+qi$ (p, q は実数で、 $q \neq 0$) とする。このとき

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= (p+qi)\beta\gamma = -\frac{d}{a} \\ \Leftrightarrow \alpha\beta &= -\frac{d}{a\gamma} (\neq 0) \\ \Leftrightarrow (p+qi) \cdot \beta &= -\frac{d}{a\gamma} (\neq 0) \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= -\frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= -\frac{b}{a} - \gamma \\ \Leftrightarrow (p+qi) + \beta &= -\frac{b}{a} - \gamma \end{aligned}$$

である。この 2 つの式を同時に満たす β は一意に決定される。ここで、

$$\beta = p - qi$$

のとき上記 2 式を満たすので

$$\beta = \overline{p+qi} = \bar{\alpha}$$

となり、 $P(x)=0$ が実数でない α を解にもてば、共役複素数 $\bar{\alpha}$ も解に持つが示された。

(証明終)

(3)

 $P(x)=0$ は x の 3 次方程式であるから、少なくとも 1 つは実数解をもつ。

[1] 解に虚数解が含まれないとき

解は 3 つとも実数となる。

[2] 解に 1 つ以上虚数解を含むとき

(2)より、虚数解の 1 つを α とすると $\bar{\alpha}$ も虚数解として持つことになる。上で述べたように実数解は必ず 1 つ以上存在するので、解に虚数解を含むとき、実数解の個数は必ず 1 つである。以上[1], [2]より、解 α, β, γ のうち実数となるものの個数は 1 個または 3 個となる。

(答) 1 個または 3 個

(4)

[1] 解のうち、実数となるものの個数が 3 個のとき

 $ad > 0$ のとき

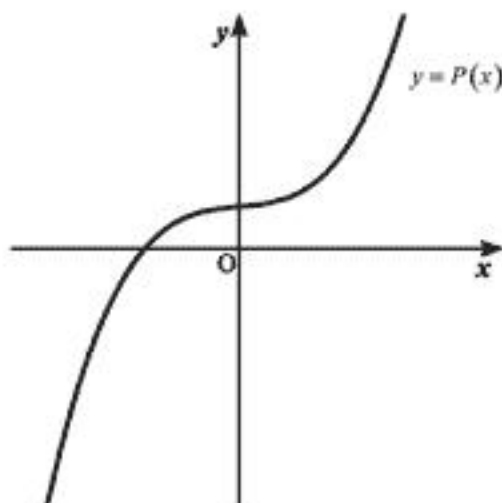
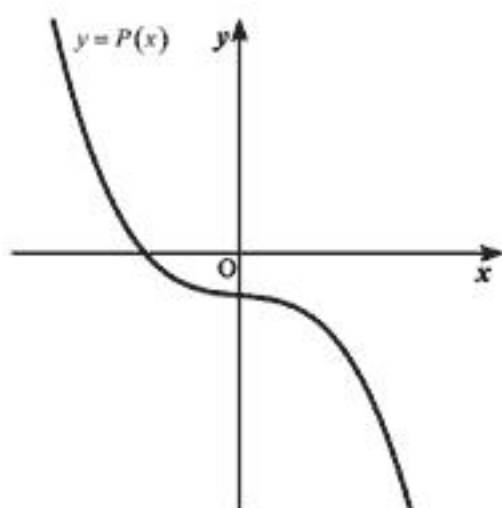
$$d = -a \cdot \alpha\beta\gamma$$

より

$$\alpha\beta\gamma < 0$$

である。よって解のうち 1 個または 3 個が負の実数であるから、 α, β, γ のうち正の実数となるものの個数は 0 個または 2 個である。

[2] 解のうち、実数となるものの個数が 1 個のとき

 $a > 0, d > 0$ のとき、 $y = P(x)$ のグラフは次のようになる。また、 $a < 0, d < 0$ のとき $y = P(x)$ のグラフは次のようになる。以上より、 α, β, γ のうち正の実数となるものの個数は 0 個である。以上[1], [2]より、解 α, β, γ のうち正の実数となるものの個数は 0 個または 2 個である。

(答) 0 個または 2 個

[1] $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{4}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}
 S(a) &= \int_a^{\frac{4}{3}} (3x-4)(x-4)dx - \int_{\frac{1}{2}}^{a+1} (3x-4)(x-4)dx \\
 &= \int_a^{\frac{4}{3}} (3x^2 - 16x + 16)dx - \int_{\frac{1}{2}}^{a+1} (3x^2 - 16x + 16)dx \\
 &= \left[x^3 - 8x^2 + 16x \right]_a^{\frac{4}{3}} - \left[x^3 - 8x^2 + 16x \right]_{\frac{1}{2}}^{a+1} \\
 &= -2a^3 + 13a^2 - 19a + \frac{269}{27}
 \end{aligned}$$

である。このとき

$$S'(a) = -6a^2 + 26a - 19 = -6 \left(a - \frac{13 + \sqrt{55}}{6} \right) \left(a - \frac{13 - \sqrt{55}}{6} \right)$$

となる。

[2] $\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}
 S(a) &= -\int_a^{a+1} (3x-4)(x-4)dx \\
 &= -\int_a^{a+1} (3x^2 - 16x + 16)dx \\
 &= -\left[x^3 - 8x^2 + 16x \right]_a^{a+1} \\
 &= -3a^2 + 13a - 9
 \end{aligned}$$

である。このとき、

$$S'(a) = -3 \left(a - \frac{13}{6} \right)^2 + \frac{61}{12} > 0$$

となる。

以上[1], [2]より、 $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{13-\sqrt{55}}{6}$	...	$\frac{4}{3}$	...	$\frac{3}{2}$
$S'(a)$		-	0	+	0	+	
$S(a)$		↘	最小	↗		↗	

増減表より、 $a = \frac{13-\sqrt{55}}{6}$ で $S(a)$ は最小になる。

(答) $a = \frac{13-\sqrt{55}}{6}$