

1

(1)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$T^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

より

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

と推測できる。これを、数学的帰納法により証明する。

[1] $n=1$ のときは、明らかに成り立つ。

[2] $n=k$ のときに成り立つとする、つまり

$$T^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$$

とする。このとき

$$T^{k+1} = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

となって、 $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上より、

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

である事が示された。

$$(\text{答}) \quad T^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^n &= P^{-1}A^nP \quad (\because P^{-1}P = E) \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & n \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & n \\ -3 & 3-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3+n & n \\ -n & 3-n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3+n & n \\ -n & 3-n \end{pmatrix}$$

(1)

条件より

$$-t + \sqrt{2}s = -t^2 + 2t$$

$$\therefore s = \frac{3t - t^2}{\sqrt{2}}$$

となる。また、 $P\left(\frac{\sqrt{2}s}{2}, \frac{\sqrt{2}s}{2}\right)$, $Q(t, -t + \sqrt{2}s)$ となるので、距離は

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}s}{2} - t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}s}{2} + t - \sqrt{2}s\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{t - t^2}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{t - t^2}{\sqrt{2}} \quad (\because 0 \leq t \leq 1)$$

となる。

$$(\text{答}) PQ = \frac{t - t^2}{\sqrt{2}}, \quad s = \frac{3t - t^2}{\sqrt{2}}$$

(2)

$$OP = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)^2} = s$$

より、求める体積は(1)より、

$$\int_0^{\sqrt{2}} \pi \left(\frac{t - t^2}{\sqrt{2}} \right)^2 ds$$

と表される。ここで、

$$\begin{array}{c|c} s & 0 \rightarrow \sqrt{2} \\ \hline t & 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$ds = \frac{3 - 2t}{\sqrt{2}} dt$$

より、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \pi \left(\frac{t - t^2}{\sqrt{2}} \right)^2 ds &= \int_0^1 \pi \left(\frac{t - t^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{3 - 2t}{\sqrt{2}} dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \left(-2t^6 + \frac{7}{5}t^5 - 2t^4 + t^3 \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[-\frac{t^6}{3} + \frac{7}{5}t^5 - 2t^4 + t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{5} - 2 + 1 \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{60} \pi \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \frac{\sqrt{2}}{60} \pi$$

3

(1)

$$f(1)=1 \Leftrightarrow h(1)=-1$$

$$f(2)=3 \Leftrightarrow h(2)=-1$$

$$f(3)=6 \Leftrightarrow h(3)=1$$

$$f(4)=10 \Leftrightarrow h(4)=1$$

$$f(5)=15 \Leftrightarrow h(5)=-1$$

$$f(6)=21 \Leftrightarrow h(6)=-1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad h(1)=-1, \quad h(2)=-1, \quad h(3)=1, \quad h(4)=1, \quad h(5)=-1, \quad h(6)=-1$$

(2)

条件より

$$P'(x)=3ax^2-6bx+3c$$

となるので、 $3ax^2-6bx+3c=0$ の判別式を、 D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 9b^2 - 9ac \\ &= 9(b^2 - ac) > 0 \end{aligned}$$

が求める条件であり、 $b^2=1$ より、

$$ac=-1$$

となればよい。

a, b, c, d は $\frac{1}{3}$ の確率で1となり、 $\frac{2}{3}$ の確率で-1となる。よって、求める確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{9}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{4}{9}$$

(3)

条件より

$$\begin{aligned} P''(x) &= 6ax - 6b \\ &= 6(ax - b) \end{aligned}$$

となるので、点 $(1, P(1))$ が変曲点になる条件は、 $a \neq 0$ より、

$$P''(1)=6(a-b)=0 \Leftrightarrow a=b$$

となる。よって、求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{5}{9}$$

(4)

$$\begin{aligned} P(1) &= P'(1) = P''(1) = 0 \\ \Leftrightarrow a-3b+3c-d &= 3a-6b+3c = 6a-6b = 0 \end{aligned}$$

となる確率を求める。

$$\begin{aligned} 6a-6b &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= b \\ 3a-6b+3c &= 6a-6b \\ \Leftrightarrow 3a &= 3c \\ \Leftrightarrow a &= c \\ a-3b+3c-d &= 3a-6b+3c \\ \Leftrightarrow a-3a+3a-d &= 3a-6a+3a \\ \Leftrightarrow a &= d \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} a-3b+3c-d &= 3a-6b+3c = 6a-6b = 0 \\ \Leftrightarrow a &= b = c = d \\ \Leftrightarrow a &= b = c = d = 1 \text{ または } a = b = c = d = -1 \end{aligned}$$

が得られる。よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} + \frac{16}{81} = \frac{17}{81}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{17}{81}$$