

(1)

ある自然数 l を用いる。 $m = 3l \pm 1$ のとき

$$(3l \pm 1)^2 = 9l^2 \pm 6l + 1 = 3(3l^2 \pm 2l) + 1$$

となり、3 で割った余りは、1 となる。 $m = 3l$ のとき

$$(3l)^2 = 3 \cdot 3l^2$$

となり、3 で割った余りは、0 となる。

以上より、題意が示された。

(証明終)

(2)

[1] ab が 3 の倍数である事の証明

もし、 a, b が共に 3 で割り切れないとすると、 a^2, b^2 を 3 で割った余りは 1 である。よって、 $c^2 = a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは 2 となり、(1)の結果に反する。よって、 a, b の少なくとも一方は 3 で割り切れる。従って、 ab は 3 の倍数である。

[2] ab が 4 の倍数である事の証明

m が偶数のとき、 $m = 2k$ (k は整数) とおける。このとき、 $m^2 = 4k^2$ より、 m^2 を 8 で割った余りは 0 または 4 である。

m が奇数のとき、 $m = 2k - 1$ (k は整数) とおける。このとき、

$$m^2 = (2k - 1)^2 = 4k(k - 1) + 1$$

であり、 k と $k - 1$ のどちらかは必ず偶数なので、 $k(k - 1)$ は偶数である。よって、 m^2 を 8 で割った余りは 1 である。

もし、 a, b が共に奇数とすると、 a^2, b^2 を 8 で割った余りは 1 である。よって、 $c^2 = a^2 + b^2$ を 8 で割った余りは 2 となり、0, 1, 4 のいずれかであることに反する。よって、 a, b の少なくとも一方は偶数である。

両方が偶数なら、 ab は 4 の倍数である。

一方が偶数、もう一方が奇数のとき、 b を奇数としても一般性を失わない。このとき、 c も奇数なので、 $a^2 = c^2 - b^2$ は 8 で割り切れる。よって、 a は 4 の倍数である。従って、 ab は 4 の倍数である。

以上[1], [2]より、 ab は 12 の倍数である。

(証明終)

(1)

条件より

$$\angle \mathbf{P}_k \mathbf{O} \mathbf{P}_{k+1} = \frac{1}{n} \pi$$

となるので

$$\angle \mathbf{A} \mathbf{O} \mathbf{P}_k = \frac{k}{n} \pi$$

となる。このとき、余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mathbf{P}_k)^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{k}{n} \pi \\ &= 2 - 2 \cos \frac{k}{n} \pi \\ &= 4 \sin^2 \frac{k \pi}{2n} \\ (\mathbf{B} \mathbf{P}_k)^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \left(\pi - \frac{k}{n} \pi \right) \\ &= 2 + 2 \cos \frac{k}{n} \pi \\ &= 4 \cos^2 \frac{k \pi}{2n} \end{aligned}$$

と求まる。よって

$$0 \leq \frac{k \pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}$$

より,

$$\begin{aligned} l_n(k) &= 2 \sin \frac{k \pi}{2n} + 2 \cos \frac{k \pi}{2n} + 2 \\ &= 2 \left(\sin \frac{k \pi}{2n} + \cos \frac{k \pi}{2n} + 1 \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) l_n(k) = 2 \left(\sin \frac{k \pi}{2n} + \cos \frac{k \pi}{2n} + 1 \right)$$

(2)

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n l_n(k)}{n} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k \pi}{2n} + \cos \frac{k \pi}{2n} \right) + n}{n} \\ &= 2 \left\{ \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k \pi}{2n} + \cos \frac{k \pi}{2n} \right) + 1 \right\} \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx + 2 \\ &= \frac{4}{\pi} [-\cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \\ &= \frac{8}{\pi} + 2 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \alpha = \frac{8}{\pi} + 2$$

(1)

4 点 O, A, B, C は同一平面上にないので、点 A, B, C を含む平面上に点 D がある事の必要十分条件は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &= (1-s-t)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

と表せる事である。よって、このように表せる為の実数 x, y, z が満たすべき条件は

$$x + y + z = 1$$

である。

(答) $x + y + z = 1$

(2)

4 点 A, B, C, D が四角形をなし、なおかつ、各辺の中点からなる四角形 $PQRS$ を含む事から、四角形 $ABCD$ は凸四角形なので、

$$x > 0, y < 0, z > 0$$

である。また、条件より三角形 ABC は正三角形であり、四角形 $PQRS$ は長方形なので、点 D は線分 AC の垂直二等分線上にある。よって、

$$x = z$$

である。よって、

$$\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{a} + (1-2x)\overrightarrow{b} + x\overrightarrow{c}$$

と表せるので、

$$|\overrightarrow{OD}|^2 = x^2 + (1-2x)^2 + x^2 = 6x^2 - 4x + 1$$

より、

$$|\overrightarrow{OD}|^2 = \frac{17}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 4x + 1 = \frac{17}{2}$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 8x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(6x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad (\because x > 0)$$

となる。よって、

$$y = 1 - 2x = -2, z = x = \frac{3}{2}$$

より、

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -2, \frac{3}{2} \right)$$

である。

(答) $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -2, \frac{3}{2} \right)$