$\boxed{1}$

(1)　$x^2-2kx+k^2=1-x^2$ を解いて,

$$2x^2-2kx+k^2-1=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

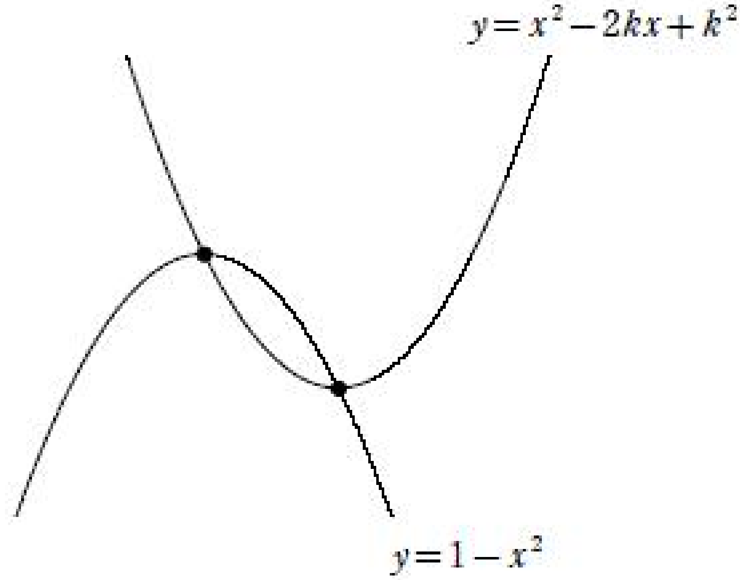
異なる2点で交わることより,

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)>0$$

$$k^2-2<0$$

$$\left(k+\sqrt{2}\right)\left(k-\sqrt{2}\right)<0$$

$$\underline{-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots(答)$$



(2)　P, Q の x 座標をそれぞれ α, β とおくと,

$$\mathrm{P}\left(\alpha, 1-\alpha^2\right), \mathrm{Q}\left(\beta, 1-\beta^2\right), \mathrm{R}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{2-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)$$

ここで, α, β は $(*)$ の2解ゆえ,

$$\alpha+\beta=k, \qquad \alpha\beta=\frac{k^2-1}{2}$$

$$\therefore \quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=k^2-2\cdot\frac{k^2-1}{2}=1$$

したがって, $\mathrm{R}\left(X, Y\right)$ とおくと,

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{k}{2} & \rightarrow \quad (1)より, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<X<\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ Y=\dfrac{2-\alpha^2-\beta^2}{2}=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2} & \end{cases}$$

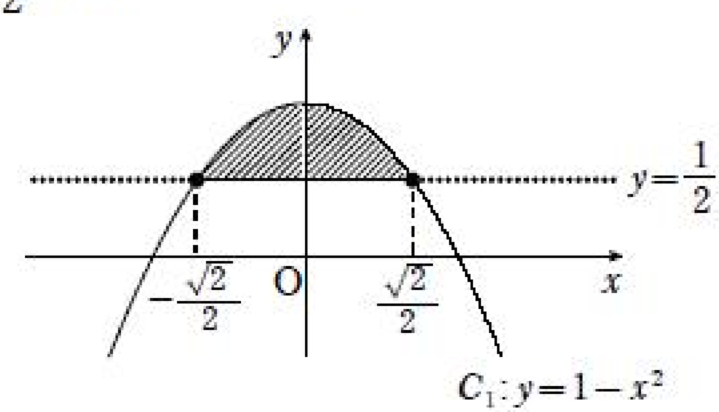
以上より,

R の軌跡は直線 $y=\dfrac{1}{2}$ の $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の部分　……(答)

(3)　求める面積は,

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}} \quad \cdots\cdots(答)$$



$\boxed{2}$

(1) $2^x = X$ とおく．$(X > 0)$

$$y = 8^x - 3 \cdot 2^x = X^3 - 3X$$

$y = 0$ のとき，$X^3 - 3X = 0$

$$X(X^2 - 3) = 0$$

$$X = 0, \pm\sqrt{3}$$

$X > 0$ より，　$X = \sqrt{3}$

$$2^x = \sqrt{3}$$

$$\log_2 2^x = \log_2 \sqrt{3}$$

$$\underline{x = \frac{1}{2}\log_2 3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $X^3 - 3X = f(X)$ とおくと，

$$f'(X) = 3X^2 - 3 = 3(X+1)(X-1)$$

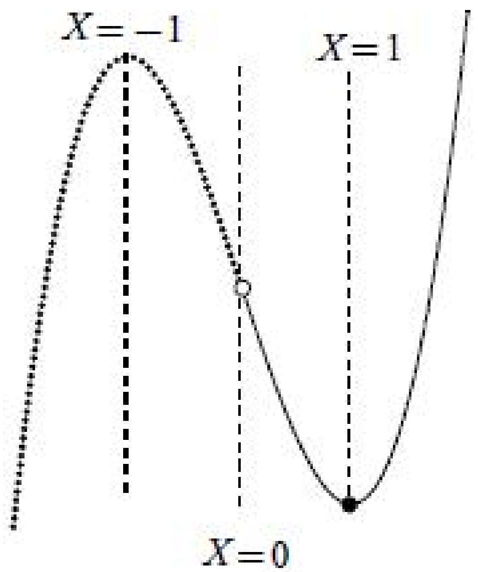
グラフより，$X > 0$ における y の最小値は，

$X = 1$ のとき，

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = \underline{-2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

このとき，$2^x = 1$ より，

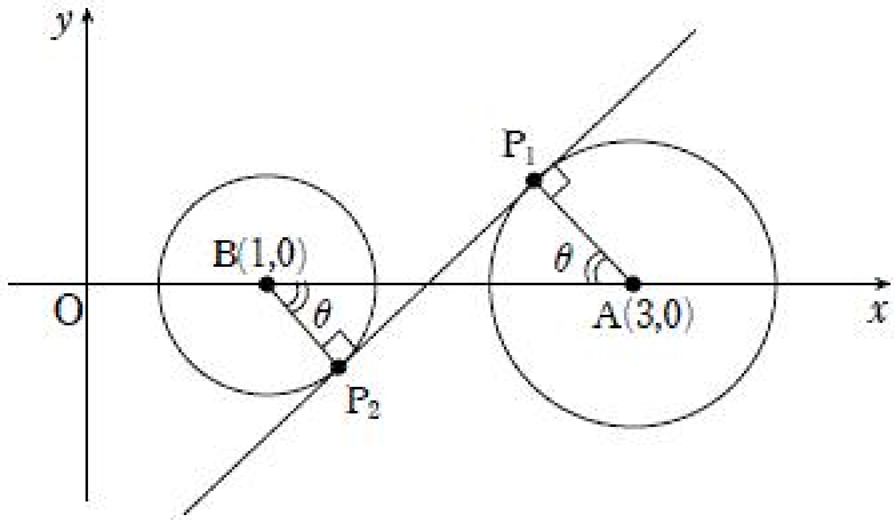
$$\underline{x = 0} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$



X	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(X)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(X)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

3

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}$$
$$=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+r_1\begin{pmatrix}\cos(\pi-\theta)\\ \sin(\pi-\theta)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3-r_1\cos\theta\\ r_1\sin\theta\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP_2}}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+r_2\begin{pmatrix}\cos(-\theta)\\ \sin(-\theta)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1+r_2\cos\theta\\ -r_2\sin\theta\end{pmatrix}$$



よって、　$\underline{\mathrm{P_1}\left(3-r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta\right),\ \mathrm{P_2}\left(1+r_2\cos\theta,\ -r_2\sin\theta\right)}$　……(答)

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BP_2}}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP_2}}$ となる．

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}=0$

$$\begin{pmatrix}3-r_1\cos\theta-(1+r_2\cos\theta)\\ r_1\sin\theta-(-r_2\sin\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3-r_1\cos\theta-3\\ r_1\sin\theta\end{pmatrix}=0$$
$$\begin{pmatrix}2-(r_1+r_2)\cos\theta\\ (r_1+r_2)\sin\theta\end{pmatrix}\cdot r_1\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=0$$
$$-2\cos\theta+(r_1+r_2)\cos^2\theta+(r_1+r_2)\sin^2\theta=0$$
$$-2\cos\theta+r_1+r_2=0$$
$$\underline{\cos\theta=\frac{r_1+r_2}{2}}\quad\text{……(答)}$$

(3)
$$\triangle\mathrm{OP_1P_2}=\frac{1}{2}\left|r_1\sin\theta\left(1+r_2\cos\theta\right)+r_2\sin\theta\left(3-r_1\cos\theta\right)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\left(r_1+3r_2\right)\sin\theta\right|$$
$$=\frac{1}{2}(r_1+3r_2)\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}(r_1+3r_2)\sqrt{1-\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}(r_1+3r_2)\sqrt{\frac{4-\left(r_1+r_2\right)^2}{4}}$$
$$\underline{=\frac{1}{4}(r_1+3r_2)\sqrt{(2+r_1+r_2)(2-r_1-r_2)}}\quad\text{……(答)}$$

$\boxed{4}$

(1) $2(n+1)a_n$ について，

$n=1$ のとき，$2(1+1)a_1=2(1+1)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=3$ ……(答)

$n=2$ のとき，$2(2+1)a_2=2(2+1)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)=4$ ……(答)

$n=3$ のとき，$2(3+1)a_3=2(3+1)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)=5$ ……(答)

$n=4$ のとき，$2(4+1)a_4=2(4+1)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\left(1-\dfrac{1}{25}\right)=6$ ……(答)

(2) $2(n+1)a_n=n+2$，すなわち，$a_n=\dfrac{n+2}{2(n+1)}$ と推定できる．

$n=1$ のとき，確かに成り立つ

$n=k$ のとき，成り立つと仮定

このとき，

$$a_{k+1}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)$$
$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)$$
$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}$$
$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}$$
$$=\frac{k+3}{2(k+2)}$$

よって，$n=k+1$ のときにも成り立つので，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して推定は正しい． □

(3) $\dfrac{n+2}{2(n+1)}>\dfrac{1}{2}+\dfrac{100}{n^2}$ のとき，

$$\frac{n+2}{2(n+1)}>\frac{n^2+200}{2n^2}$$

n は自然数ゆえ，$n^2>0$，$n+1>0$

よって，

$$n^2(n+2)>(n^2+200)(n+1)$$
$$n^2-200n>200$$
$$n(n-200)>200$$

これを満たす最小の自然数 n は 201 ……(答)