

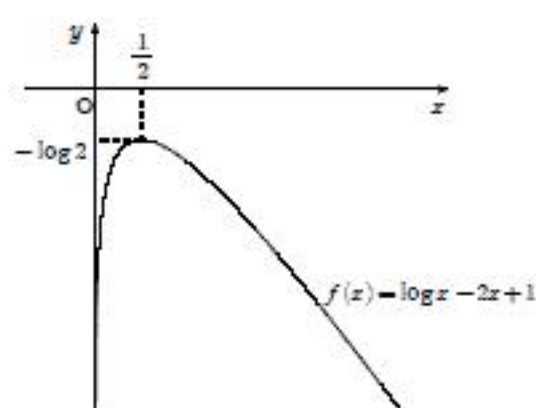
1

$$(1) \quad f(x) = \log x - 2x + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2$$

増減表より、グラフは下図となる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	$\times$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\times$	$\nearrow$	$-\log 2$	$\searrow$



$$(2) \quad A(a, \log a - 2a + 1)$$

$$P(a+t, \log(a+t) - 2(a+t) + 1)$$

$$Q(a-t, \log(a-t) - 2(a-t) + 1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (a+t-a, \log(a+t) - 2(a+t) + 1 - \log a + 2a - 1) \\ &= (t, \log(a+t) - \log a - 2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= (a-t-a, \log(a-t) - 2(a-t) + 1 - \log a + 2a - 1) \\ &= (-t, \log(a-t) - \log a + 2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} \\ &= (0, \log(a+t) + \log(a-t) - 2\log a) \\ &= \left(0, \log \frac{a^2 - t^2}{a^2}\right) = \left(0, \log \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)\right) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{四角形 APRQ} = \triangle APR + \triangle AQR$$

(2)より,

$$\triangle APR = \frac{1}{2} \left| t \cdot \log \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right) \right|$$

$$\triangle AQR = \frac{1}{2} \left| -t \cdot \log \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right) \right|$$

$$0 < t < a \text{ より, } 0 < \frac{t^2}{a^2} < 1$$

$$\text{よって, } \log \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right) < 0$$

ゆえに,

$$S(t) = -t \log \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{S(t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ -\frac{1}{t^2} \log \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right) \right\} = \lim_{t \rightarrow +0} \log \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{t^2}}$$

$$-\frac{t^2}{a^2} = h \text{ とおくと, } t \rightarrow +0 \text{ のとき } h \rightarrow -0$$

$$\text{また, } -\frac{1}{t^2} = \frac{1}{a^2 h}$$

よって,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \log \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{t^2}} &= \lim_{h \rightarrow -0} \log (1+h)^{\frac{1}{a^2 h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \log \left\{ (1+h)^{\frac{1}{h}} \right\}^{\frac{1}{a^2}} \\ &= \log e^{\frac{1}{a^2}} \\ &= \frac{1}{a^2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(1) 平面 α に垂直なベクトルを $\vec{n} = (l, m, n)$ とする.

$$\overline{AB} = (1, -1, -1), \overline{AC} = (1, 2, 0)$$

$$\vec{n} \perp \overline{AB} \text{ より, } l - m - n = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \perp \overline{AC} \text{ より, } l + 2m = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \vec{n} = m(-2, 1, -3)$$

$$\vec{n}' = (-2, 1, -3) \text{ とすると,}$$

平面 α は $A(1, 2, 2)$ を通り, $\vec{n}' = (-2, 1, -3)$ に垂直なので,

$$-2(x-1) + (y-2) - 3(z-2) = 0$$

$$\text{平面 } \alpha: 2x - y + 3z - 6 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

l_1 は $(0, 2, 1)$ を通り, $\vec{a} = (1, 1, 1)$ に平行なので,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2+t_1 \\ 1+t_1 \end{pmatrix} \quad (t_1 \text{ は実数})$$

③ に代入して,

$$2t_1 - (2+t_1) + 3(1+t_1) - 6 = 0 \text{ より, } t_1 = \frac{5}{4}$$

$$\text{よって, } \underline{E\left(\frac{5}{4}, \frac{13}{4}, \frac{9}{4}\right)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

l_2 は $(0, 2, 1)$ を通り, $\vec{b} = (-1, -1, 1)$ に平行なので,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_2 \\ 2-t_2 \\ 1+t_2 \end{pmatrix} \quad (t_2 \text{ は実数})$$

③ に代入して,

$$-2t_2 - (2-t_2) + 3(1+t_2) - 6 = 0 \text{ より, } t_2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{よって, } \underline{F\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \overline{DE} = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right), \overline{DF} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ より,}$$

$$|\overline{DE}| = \frac{5\sqrt{3}}{4}, |\overline{DF}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \overline{DE} \cdot \overline{DF} = -\frac{25}{8}$$

$$\text{よって, } \cos \theta = \frac{-\frac{25}{8}}{\frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\triangle DEF = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{25\sqrt{2}}{8} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1)(*) の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &= (a+d)^2 - 4(ad-bc) \\ &= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc \\ &= (a-d)^2 + 4bc \end{aligned}$$

ここで, $(a-d)^2 \geq 0, b > 0, c > 0$ より, $D > 0$

よって, (*) は異なる2つの実数解を持つ.

また, (*) より, $a+d$ は2解の和であり, $a > 0, d > 0$ である.

2解の和が正であることから, 少なくとも大きい方の解が正であることがわかる.

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} (A - \beta E) \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-\beta & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases} (a-\beta)b + by = 0 & \dots\dots ① \\ cb + (d-\beta)y = 0 & \dots\dots ② \end{cases} \end{aligned}$$

$b > 0$ より,

$$① \Leftrightarrow \beta = a + y \quad \dots\dots ①' \text{ である.}$$

ここで (*) より

$$\beta = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2} \quad \dots\dots ③$$

であり, ①' を代入すると,

$$y = \frac{d-a+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2} \quad \dots\dots (\text{答}) \quad (\dots\dots ④)$$

となり, ③, ④ の値は ② を満たす.

(3) ①' を②に代入すると,

$$\begin{aligned} cb + (d-a-y)y &= 0 \\ \therefore y^2 + (a-d)y - bc &= 0 \quad \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

となり, (2) で求めた y は ⑤ の解の大きい方である. $\dots\dots ⑥$

⑤ と解と係数の関係により, 2解の積は負, これより正と負の解をもつことがわかるが, ⑥ より (2) で求めた y の値は正である.

(証明終)