

1

(1) $a=1$ のとき

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x - \frac{1}{4}$$

$$= \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4}$$

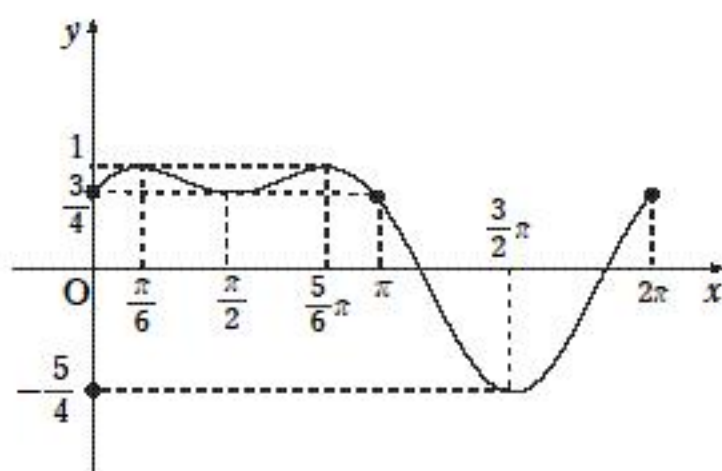
$$f'(x) = \cos x - \sin 2x$$

$$= \cos x(1 - 2\sin x)$$

増減表は以下の通り.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		2π	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	

よって, グラフは



$$(2) \quad f(x) = \sin x + \frac{a}{2} \cos 2x + \frac{a}{2} - \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \cos x - a \sin 2x$$

$$= \cos x(1 - 2a \sin x)$$

(i) $a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$0 < x < \pi \text{ において, } 1 - 2a \sin x \geq 0$$

よって, $\cos x = 0$ のとき, 極値をとり, 増減表は次のようになる

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$a - \frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$a - \frac{1}{4}$

(ii) $a > \frac{1}{2}$ のとき

$$1 - 2a \sin \alpha = 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \text{ とすると, 増減表は次のようになる.}$$

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - \alpha$	π			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$a - \frac{1}{4}$	$\searrow$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$\nearrow$	$a - \frac{1}{4}$	

 $f(x)$ の極値を与える x が, $0 < x < \pi$ で 3 個存在する.

以上より,

 $f(x)$ の極値を与える x が $0 < x < \pi$ の範囲に 1 個だけ存在する.

$$\iff a \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a_2 = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 7 \\
 & b_2 = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24 \\
 & a_3 = 4 \cdot 7 - 3 \cdot 24 = -44 \\
 & b_3 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 24 = 117 \\
 & a_4 = 4 \cdot (-44) - 3 \cdot 117 = -527 \\
 & b_4 = 3 \cdot (-44) + 4 \cdot 117 = 336
 \end{aligned}$$

(2) (i) $n=1$ のとき,

$$a_5 - a_1 = 4a_4 - 3b_4 - a_1 = 4 \cdot (-527) - 3 \cdot 336 - 4 = -3120$$

$$a_5 - b_1 = 3a_4 + 4b_4 - b_1 = 3 \cdot (-527) + 4 \cdot 336 - 3 = -240$$

よって, $n=1$ のとき, ともに 5 の倍数である.

(ii) $n=k$ のとき, ともに 5 の倍数であることを仮定する.

$$a_{k+4} - a_k = 5\alpha, b_{k+4} - b_k = 5\beta \text{ とおく. } (\alpha, \beta: \text{自然数})$$

$$a_{k+5} - a_{k+1} = 4a_{k+4} - 3b_{k+4} - (4a_k - 3b_k)$$

$$= 4(a_{k+4} - a_k) - 3(b_{k+4} - b_k)$$

$$= 5(4\alpha - 3\beta)$$

$$b_{k+5} - b_{k+1} = 3a_{k+4} + 4b_{k+4} - (3a_k + 4b_k)$$

$$= 3(a_{k+4} - a_k) + 4(b_{k+4} - b_k)$$

$$= 5(3\alpha + 4\beta)$$

よって, $n=k+1$ のときも成立.

(i), (ii) より, $a_{n+4} - a_n$ および $b_{n+4} - b_n$ はともに 5 の倍数であることが示された.

(3) $n=1, 2, 3, 4$ のとき (1) より,

$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ は 5 の倍数ではない.

また, (2) より, $a_{n+4} - a_n$ と $b_{n+4} - b_n$ が 5 の倍数であるので,

a_n と b_n が 5 の倍数でないとき, a_{n+4}, b_{n+4} も 5 の倍数ではない.

よって, $a_1 \cdot b_1$ により, a_{4k+1}, b_{4k+1} が 5 の倍数ではないことがわかる.

同様にして, $a_{4k+2}, b_{4k+2}, a_{4k+3}, b_{4k+3}, a_{4k}, b_{4k}$ も 5 の倍数ではないことが帰納的にわかる. ($k \geq 0$ の整数)

以上により, a_n, b_n はともに 5 の倍数ではないことが示された.

$$(1) \quad \frac{9!}{3!3!3!} = \underline{1680} \text{ (通り) } \dots\dots \text{ (答)}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccccc} \text{赤} & \text{赤} & \text{赤} & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & \end{array}$$

$$\frac{6!}{3!3!} = 20 \text{ 通り}$$

$$\left. \begin{array}{cccccc} \text{白} & \text{白} & \text{白} & \text{黒} & \text{黒} & \text{黒} \\ \text{黒} & \text{黒} & \text{黒} & \text{白} & \text{白} & \text{白} \end{array} \right\} \text{ となる場合を除く}$$

$$20 - 2 = 18 \text{ 通り}$$

先頭の3個が白, 黒となる時も同様なので

$$18 \times 3 = 54 \text{ (通り)}$$

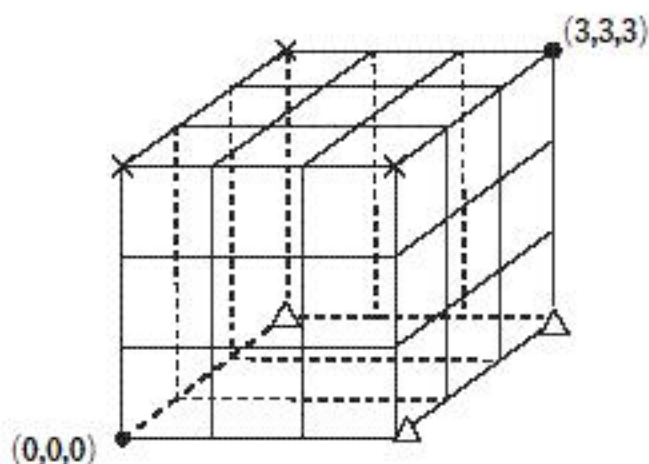
末尾の3個の玉が同じである場合も同じように考えられる.

また, 先頭も末尾も同じ色である場合は6通り

よって,

$$54 \times 2 + 6 = \underline{114} \text{ (通り) } \dots\dots \text{ (答)}$$

(3)



$\triangle$ と $\times$ を通らないように $(0, 0, 0) \rightarrow (3, 3, 3)$ に進む.

$\Leftrightarrow$ はじめの3回と最後の3回を

3回連続 $(x+1, y, z)$

または

3回連続 $(x, y+1, z)$

または

3回連続 $(x, y, z+1)$

と進む場合以外の進み方

(1)(2)の結果を利用して

$$(\text{全ての進み方}) - 114 = 1680 - 114$$

$$= \underline{1566} \text{ (通り) } \dots\dots \text{ (答)}$$