

3の倍数の目が出る確率は $\frac{1}{3}$

それ以外の目が出る確率は $\frac{2}{3}$

- (1) 3の倍数の目が3回、それ以外の目が2回出ればよいので、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot {}_5C_2 = \frac{40}{243} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (2)

$$\left. \begin{array}{l} \text{3の倍数の目が4回} \\ \text{それ以外の目が1回} \end{array} \right\} \text{出るとき, } \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot {}_5C_1 = \frac{10}{243}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{3の倍数の目が5回} \\ \text{それ以外の目が0回} \end{array} \right\} \text{出るとき, } \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

$$\therefore \frac{10}{243} + \frac{1}{243} = \frac{11}{243} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (3) $(x, y) = (5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)$ の中で、 $x^2 + y^2$ が最小値をとるのは、 $(x, y) = (3, 2), (2, 3)$ のとき

$$\left. \begin{array}{l} \text{3の倍数の目が2回} \\ \text{それ以外の目が3回} \end{array} \right\} \text{出るとき, } \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot {}_5C_2 = \frac{80}{243}$$

$$\therefore \frac{40}{243} + \frac{80}{243} = \frac{40}{81} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = mx \end{cases} \text{ を解いて, } x = 0, m+1$$

よって, P, Q の x 座標は 0 と $m+1$

- (1) $y = x^2 - x$ について, $y' = 2x - 1$
 $x = 0$ のとき, 接線の方程式は,

$$\begin{cases} \text{接線の傾き} & -1 \\ \text{通る点} & (0, 0) \end{cases} \text{ より, } y = -x$$

$x = m+1$ のとき, 接線の方程式は,

$$\begin{cases} \text{接線の傾き} & 2(m+1) - 1 = 2m + 1 \\ \text{通る点} & (m+1, m(m+1)) \end{cases} \text{ より,}$$

$$y - m(m+1) = (2m+1)(x - m - 1)$$

$$\therefore y = (2m+1)x - m^2 - 2m - 1$$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = (2m+1)x - m^2 - 2m - 1 \end{cases} \text{ を解いて, } x = \frac{m+1}{2}$$

$$\therefore R\left(\frac{m+1}{2}, -\frac{m+1}{2}\right) \quad \dots\dots (\text{答})$$

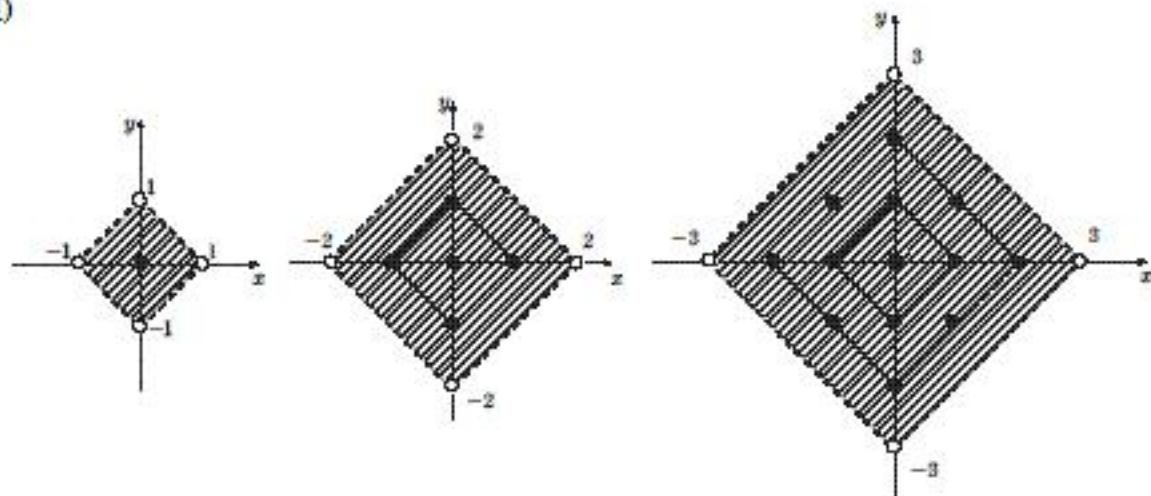
$$(2) \quad S_1 = \int_0^{m+1} \{mx - (x^2 - x)\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{m+1}{2}x^2\right]_0^{m+1} = \frac{(m+1)^3}{6}$$

また, P(0, 0), Q(m+1, m(m+1)), R\left(\frac{m+1}{2}, -\frac{m+1}{2}\right) とおけば,

$$S_2 = \triangle PQR = \frac{1}{2} \left| m(m+1) \times \frac{m+1}{2} - (m+1) \times \left(-\frac{m+1}{2}\right) \right| = \frac{(m+1)^3}{4}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{(m+1)^3}{6}}{\frac{(m+1)^3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1)



図より, $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 13$ (答)

(2) $a_{k+1} - a_k$ は, $|x| + |y| = n$ 上にある格子点の数になるので,

$$a_{k+1} - a_k = 4n \quad \text{..... (答)}$$

(3)

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 4k$$

$$a_n - a_1 = 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_n = a_1 + 2n(n-1) = 2n^2 - 2n + 1 \quad (\text{これは, } n=1 \text{ のときも成立})$$

$$\therefore a_n = 2n^2 - 2n + 1 \quad (n \geq 1) \quad \text{..... (答)}$$

$$(1) \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ より,}$$

$$-\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$$

$$\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AC} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ を代入して,}$$

$$(s+1)\vec{a} + (t+1)\vec{b} = 4\overrightarrow{AG}$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{s+1}{4}\vec{a} + \frac{t+1}{4}\vec{b} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \quad \text{四角形 } ABCD \text{ は内角がすべて } 180^\circ \text{ より小さいことより,}$$

$$s > 0, t > 0, s+t > 1$$

点 G が線分 BD 上にあるとき,

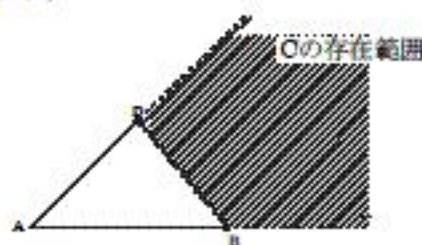
$$\frac{s+1}{4} + \frac{t+1}{4} = 1, 0 \leq \frac{s+1}{4} \leq 1, 0 \leq \frac{t+1}{4} \leq 1$$

$$\therefore s+t=2, -1 \leq s \leq 3, -1 \leq t \leq 3$$

以上より,

$$s+t=2, 0 < s < 2, 0 < t < 2$$

$\dots\dots (\text{答})$



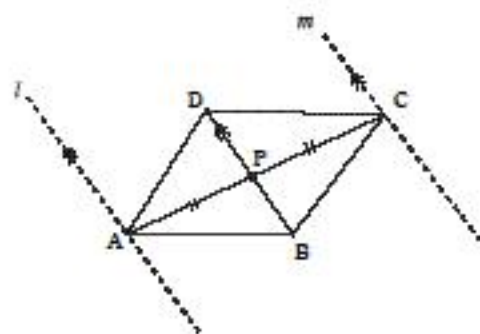
$$(3) \quad AC \text{ の中点を } P \text{ とおくと,}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{s}{2}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b}$$

$$\text{ここで, } \frac{s}{2} + \frac{t}{2} = \frac{s+t}{2} = 1 \text{ であり, } 0 < s < 2, 0 < t < 2 \text{ より,}$$

$$0 < \frac{s}{2} < 1, 0 < \frac{t}{2} < 1 \text{ であるから, } P \text{ は線分 } BD \text{ 上にある. } \square$$

$$(4)$$



A, C を通り BD に平行な直線 l, m をそれぞれひけば, $\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ は, BD を底辺としたとき, $AP = CP$ より, その高さも等しいことがわかる.

よって, $\triangle ABD = \triangle BCD \quad \square$