$\boxed{1}$

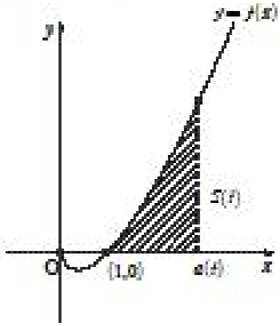
$f(x)=x\log x$ より, $f'(x)=\log x+1$, $x>0$, $t>e$

(1) $\log a(t)+1=\log t \iff \log a(t)+\log e=\log t$

$\therefore\ ea(t)=t$ 　　　　よって, $\underline{a(t)=\dfrac{t}{e}}$

(2) 増減表より, グラフは右のようになる.

x	0		$\frac{1}{e}$		1	
f'	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$
	(0,0)	↘		↗	(1,0)	↗



$$S(t)=\int_1^{\frac{t}{e}} x\log x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^{\frac{t}{e}}-\int_1^{\frac{t}{e}}\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\underline{\frac{t^2}{2e^2}\log t-\frac{3t^2}{4e^2}+\frac{1}{4}}$$

(3) $$\frac{S(t)}{t^p\log t}=\frac{1}{2e^2t^{p-2}}-\frac{3}{4e^2t^{p-2}\log t}+\frac{1}{4t^p\log t}=A(t)$$

$\boxed{0<p<2\text{ のとき}}$

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{t\to\infty}t^{2-p}\left(\frac{1}{2e^2}-\frac{3}{4e^2\log t}+\frac{1}{4t^2\log t}\right)=+\infty \quad \cdots\cdots \quad \text{発散}$$

$\boxed{2<p\text{ のとき}}$

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{p-2}}\left(\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4e^2\log t}+\frac{1}{4t^2\log t}\right)=0 \quad \cdots\cdots \quad \text{収束}$$

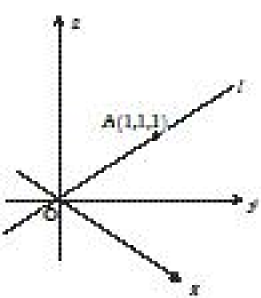
0 以外に収束するので, $p=2$ であることが必要.

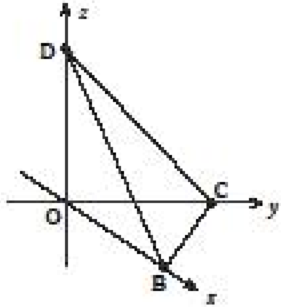
$p=2$ のとき

$$A(t)=\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4e^2\log t}+\frac{1}{4t^2\log t}$$

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}A(t)=\underline{\dfrac{1}{2e^2}}$ すなわち, $\underline{p=2}$

$\boxed{2}$





$\mathrm{B}=(1,0,0)$

$\mathrm{C}=(0,2,0)$

$\mathrm{D}=(0,0,3)$

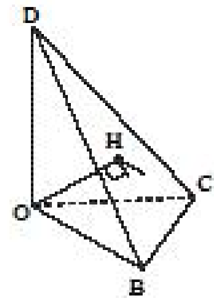
$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,2,0)$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(-1,0,3)$

(1) $\overrightarrow{a}=(x,y,z)$ とすると, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\perp\overrightarrow{a}$, $\left|\overrightarrow{a}\right|=7$ より,

$$\begin{cases}-x+2y=0\\ -x+3z=0\\ x^2+y^2+z^2=49\end{cases}$$

$x,y,z>0$ より, $\underline{\overrightarrow{a}=(6,3,2)}$

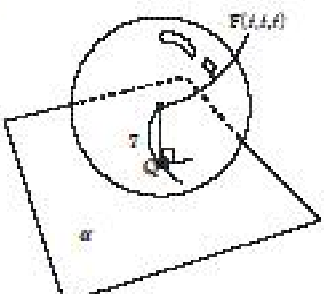


(2) $\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)^2}=\underline{\dfrac{7}{2}}$

(3) 4 面体 OBCD の体積 V は, $V=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\right)\cdot3=1$

△BCD を底面と考えると, $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot\mathrm{OH}$ $\qquad\therefore\ \underline{\mathrm{OH}=\dfrac{6}{7}}$

(4)



P は l 上なので, P (t,t,t) と表される.

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は $\overrightarrow{a}$ であるので, (1) より, Q $(t-6,t-3,t-2)$

Q は面 α 上の点であるから,

$(t-6,t-3,t-2)=k(1,0,0)+l(0,2,0)+m(0,0,3)$

$(k+l+m=1)$

成分を比較して, $t=5$ $\therefore$ $\underline{\mathrm{P}\,(5,5,5),\ \mathrm{Q}\,(-1,2,3)}$

$\boxed{3}$ $A \neq kE$

$A^2 - 3A + 2E = O \iff A^2 = 3A - 2E$

(1) $A^3 = A \cdot A^2 = A(3A - 2E)$

$= 3A^2 - 2A$

$= 3(3A - 2E) - 2A$

$= 7A - 6E$ $\quad\quad\quad \therefore\ \underline{a = 7,\ b = -6}$

(2) $A^{n+1} = A^n \cdot A^1$

$= (a_n A + b_n E) \cdot A$

$= a_n A^2 + b_n A$

$= a_n(3A - 2E) + b_n A$

$= (3a_n + b_n)A - 2a_n E$

$= a_{n+1}A + b_{n+1}E$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n & \cdots\cdots \quad ① \\ b_{n+1} = -2a_n & \cdots\cdots \quad ② \end{cases}$$

①, ② より,

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \iff \underbrace{a_{n+2} - a_{n+1}}_{c_{n+1}} = 2\underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{c_n}$

(1) より, $a_3 = 7,\ b_3 = -6,\ a_4 = 15$

$c_n = c_3 \cdot 2^{n-3} = (a_4 - a_3) \cdot 2^{n-3} = 2^n = a_{n+1} - a_n$

$\therefore\ a_n = a_3 + \sum_{k=3}^{n-1} 2^k = 2^n - 1,\ b_n = -2^n + 2$ $\quad\quad\quad \therefore\ \underline{a_n = 2^n - 1,\ b_n = -2^n + 2}$

(3) A^n の逆行列が $xA + yE$ なので,

$A^n(xA + yE) = (a_n A + b_n E)(xA + yE)$

$= xa_n A^2 + (ya_n + xb_n)A + yb_n E$

$= xa_n(3A - 2E) + y(a_n + xb_n)A + yb_n E$

$= \left((2x + y)2^n - x - y\right)A - \left((2x + y)2^n - 2x - 2y\right)E = E$

$A \neq kE$ より, 係数を比較して, $\quad\quad\quad \therefore\ \underline{x = \frac{1}{2^n} - 1,\ y = 2 - \frac{1}{2^n}}$