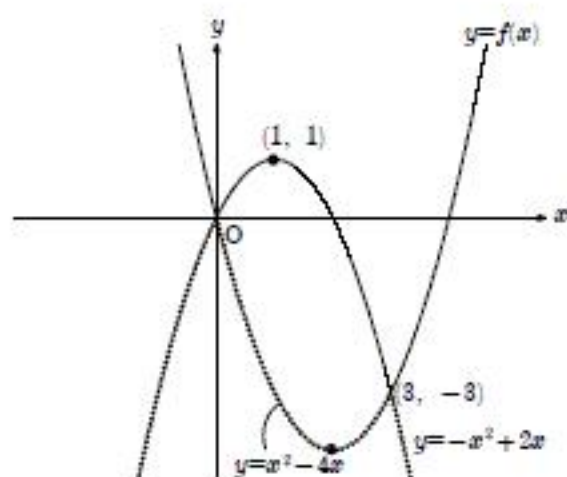


1

$$(1) \quad f(x) = |x^2 - 3x| - x = \begin{cases} x^2 - 4x & (x \leq 0, 3 \leq x) \\ -x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

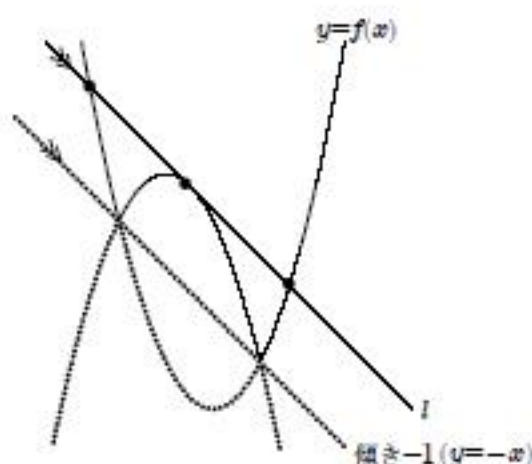
よって、グラフは図のようになる。



(2) $(0, 0), (3, -3)$ を結ぶ直線の傾きは -1

よって、 l と $y = f(x)$ のグラフがちょうど 3 点を共有するときは、

l が $y = -x^2 + 2x$ と接するときである。



$-x + k = -x^2 + 2x$ ，すなわち

$x^2 - 3x + k = 0$ が重解をもつとき、

$$D = 9 - 4k = 0$$

$$\therefore k = \frac{9}{4} \quad \dots (\text{答})$$

(3) (2) のとき、 l と $y = x^2 - 4x$ との共有点の x 座標は、

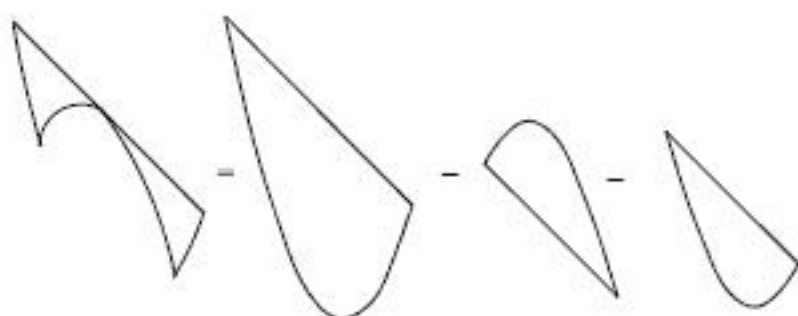
$$x^2 - 4x = -x + \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 3x - \frac{9}{4} = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 9}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

$y = -x$ と $y = -x^2 + 2x$ によって囲まれた図形と、 $y = -x$ と $y = -x^2 - 4x$ によって囲まれた図形は合同であることに注意すると、

(囲まれた図形の面積) =



$$= \int_{\frac{3-3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{2}}{2}} \left\{ \left(-x + \frac{9}{4} \right) - (x^2 - 4x) \right\} dx - \int_0^3 \{ (-x^2 + 2x) - (-x) \} dx$$

$$- \int_0^3 \{ (-x) - (x^2 - 4x) \} dx$$

$$= \int_{\frac{3-3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{2}}{2}} \left(-x^2 + 3x + \frac{9}{4} \right) dx - \int_0^3 (-x^2 + 2x) dx \times 2$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{3+3\sqrt{2}}{2} - \frac{3-3\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{6} (3-0)^3 \times 2$$

$$= \frac{1}{6} (3\sqrt{2})^3 - \frac{1}{6} \cdot 3^3 \times 2$$

$$= 9\sqrt{2} - 9$$

$\dots (\text{答})$

- 2 サイコロをふって出た目が1または2の事象を A , 3または4の事象を B , 5または6の事象を C とする.

- (1) 3回ふって, $(1, 1)$ にいるのは, A, B, C が1回ずつ出たとき.
よって,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot {}_3P_3 = \frac{2}{9} \quad \cdots (\text{答})$$

- (2) 5回ふって, $m \geq 1, n \geq 1, m+n=3$ であるのは,

$$\begin{cases} A \text{ 2回 } B \text{ 1回 } C \text{ 2回} \\ A \text{ 1回 } B \text{ 2回 } C \text{ 2回} \end{cases}$$

のどちらか.

よって,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_1 \times 2 = \frac{20}{81} \quad \cdots (\text{答})$$

3

(1) $a_{n+1} = 2a_n + n$ の両辺を 2^{n+1} で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \quad \therefore b_{n+1} = b_n + \frac{n}{2^{n+1}} \quad b_{n+1} - b_n = \frac{n}{2^{n+1}}$$

よって,

$$c_n = \frac{n}{2^{n+1}} \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$(2) \quad b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}, \quad b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = \frac{1}{2} + 1 - \frac{n+1}{2^n} = \frac{3}{2} - \frac{n+1}{2^n}$$

よって,

$$a_n = 2^n b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1 \quad \cdots \text{ (答)}$$

(これは, $n=1$ のときにも成り立つ)

4

(1) $ax^2 + bx + c = kx + k^2 + 3k + 1$, すなわち,

$ax^2 + (b-k)x + c - k^2 - 3k - 1 = 0$ が重解をもつとき, l と C は接するので, $D=0$ より,

$$(b-k)^2 - 4a(c - k^2 - 3k - 1) = 0$$

$$(1+4a)k^2 - (2b-12a)k + b^2 - 4ac + 4a = 0$$

これが, すべての実数 k に対して成り立つことより,

$$\begin{cases} 1+4a=0 \\ 2b-12a=0 \\ b^2-4ac+4a=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=-\frac{5}{4} \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

(2)

$$\begin{cases} y = kx + k^2 + 3k + 1 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \end{cases} \quad \text{を連立して解いて,} \quad \begin{cases} x = -2k - 3 \\ y = -k^2 + 1 \end{cases}$$

よって,

$$\begin{cases} s = \frac{-2k-3}{2} \\ t = \frac{-k^2+1}{2} \end{cases}$$

k を消去して,

$$t = \frac{-\left(-s - \frac{3}{2}\right)^2 + 1}{2} = -\frac{1}{2}s^2 - \frac{3}{2}s - \frac{5}{8}$$

よって, Q は放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$ を描く.

... (答)