

(1) 5で割って余り2ということは, 10で割ると余りが2または7ということだから, $10m+2$ または $10m+7$. このうち, 奇数は $10m+7$.

5で割って余り3ということは, 10で割ると余りが3または8ということだから, $10m+3$ または $10m+8$. このうち, 奇数は $10m+3$.

よって, 5で割って余りが2または3である正の奇数は $10m+3, 10m+7$ ($m=0, 1, 2, \dots$) のどちらかで表すことができる. 10個の自然数の中に2個このようなものはあるので, 1から1000の中には $(1000 \div 10) \times 2 = 200$ 個存在する.

ゆえに, $N = \underline{200} \dots$ (答)

(2)

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_N &= \sum_{m=0}^{99} (10m+3+10m+7) = \sum_{m=0}^{99} (20m+10) = \sum_{m=1}^{100} (20m-10) \\ &= 20 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} - 10 \cdot 100 = 10 \cdot 100(101-1) = \underline{100000} \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

(1) $\triangle AOP$ の外心を M とし, M から OA に下ろした垂線の足を H とする. $H(1,0)$ であり,

$\triangle OMH$ に三平方の定理を用いると,

$$MH = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore M(1, 2\sqrt{6}) \quad \text{または} \quad M(1, -2\sqrt{6})$$

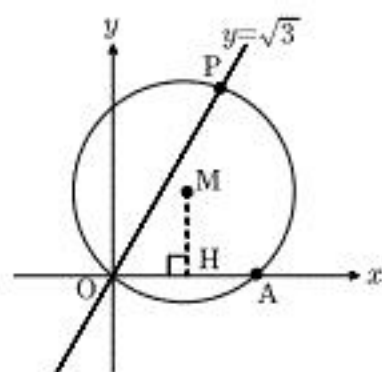
よって, 外接円の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-2\sqrt{6})^2 = 5^2 \quad \text{または}$$

$$(x-1)^2 + (y+2\sqrt{6})^2 = 5^2$$

これと $y = \sqrt{3}x$ を連立して解き, $(x, y) = (0, 0)$ 以上の点を求めると, P の座標は

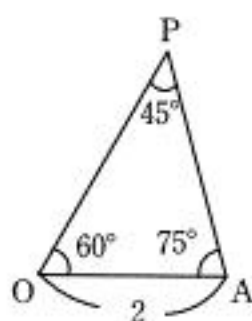
$$\left(\frac{1+6\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{2} \right), \left(\frac{1-6\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}-6\sqrt{6}}{2} \right) \quad \dots (\text{答})$$



(2)

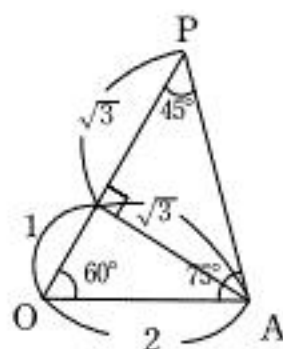
P が第 1 象限にあるとき, 図のように考えれば,

$$P((1+\sqrt{3})\cos 60^\circ, (1+\sqrt{3})\sin 60^\circ) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2} \right) \quad \dots (\text{答})$$



P が第 3 象限にあるとき, 図のように考えれば,

$$P((\sqrt{3}-1)\cos 240^\circ, (\sqrt{3}-1)\sin 240^\circ) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-3}{2} \right) \quad \dots (\text{答})$$



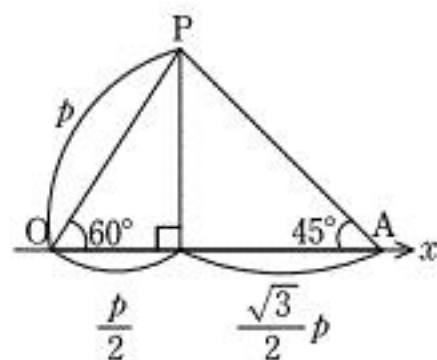
(3)

P が第 1 象限にあるとき,

$$\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}p = 2$$

$$\therefore p = 2\sqrt{3} - 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle AOP &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2\sqrt{3} - 2) \cdot \sin 60^\circ \\ &= 3 - \sqrt{3} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

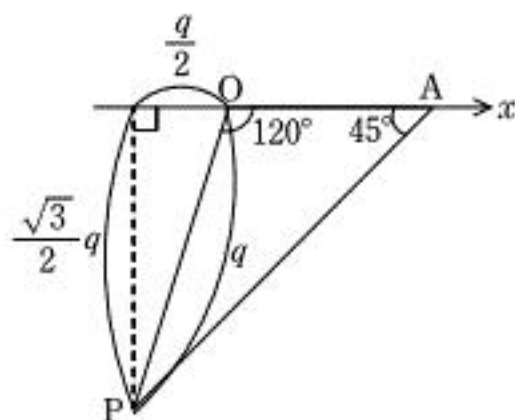


P が第 3 象限にあるとき,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}q - \frac{q}{2} = 2$$

$$\therefore q = 2\sqrt{3} + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle AOP &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2\sqrt{3} + 2) \cdot \sin 120^\circ \\ &= 3 + \sqrt{3} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

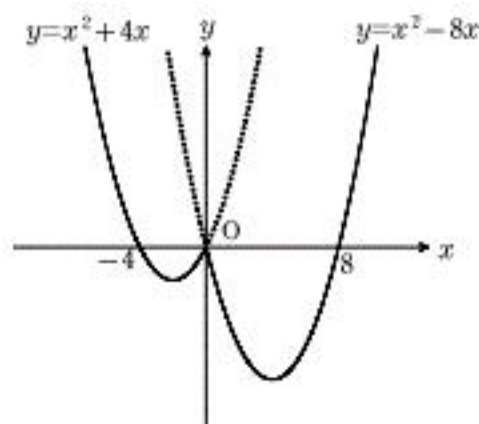


(1)

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2)-6x & (x \geq 0) \\ x(x-2)+6x & (x < 0) \end{cases} = \begin{cases} x^2-8x & (x \geq 0) \\ x^2+4x & (x < 0) \end{cases}$$

よって、 $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるので、最小値は

$$x=4 \text{ のとき, } 4^2-8 \cdot 4 = \underline{-16} \quad \cdots (\text{答})$$



(2) $x=t > 0$ における $y=f(x)$ の接線は、 $f'(x)=2x-8$ より、

$$y=(2t-8)(x-t)+t^2-8t$$

$$y=(2t-8)x-t^2$$

これが $x < 0$ で $y=x^2+4x$ と接するとき、 $x^2+4x=(2t-8)x-t^2$ を解いて、

$$x^2+(12-2t)x+t^2=0 \quad \cdots (*)$$

接することより、

$$(6-t)^2-t^2=0$$

$$36-12t=0 \quad \text{ゆえに、} t=3$$

よって、A(3, -15) $\cdots$ (答)

また、(*) の重解が $x=-3$ より、B(-3, -3) $\cdots$ (答)

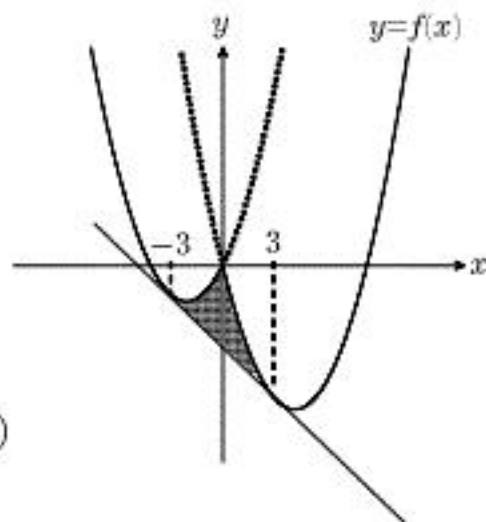
接線の方程式は $y=-2x-9$ $\cdots$ (答)

(3) 求める面積を S とすると、 $AB: y=-2x-9$ より、

$$S = \int_{-3}^0 \{x^2+4x-(-2x-9)\} dx + \int_0^3 \{x^2-8x-(-2x-9)\} dx$$

$$= \int_{-3}^0 (x+3)^2 dx + \int_0^3 (x-3)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x+3)^3 \right]_{-3}^0 + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3}(-3)^3 = \underline{18} \quad \cdots (\text{答})$$



$$(1) \quad y \geq -\frac{x}{2} + a \iff x + 2y - 2a \geq 0 \quad \cdots (*)$$

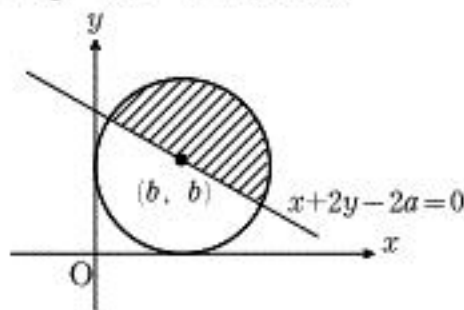
(b, b) が $(*)$ の領域内にあるとき, $3b - 2a \geq 0$

$S = \frac{\pi b^2}{2}$ となるには, $(x-b)^2 + (y-b)^2 = b^2$ の円の中心が直線 $x + 2y - 2a = 0$ 上にある

ときであるから, $3b = 2a$

したがって, $(a, b) = (3, 2), (6, 4)$ の 2 通り.

$$\text{ゆえに, } p_1 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad \cdots (\text{答})$$



(2) $S = 0$ となるのは, (b, b) が $(*)$ の領域にあらず, かつ, (b, b) と直線 $x + 2y - 2a = 0$ との距離が半径の b 以上のときであるから,

$$3b - 2a < 0 \quad \text{かつ}$$

$$\frac{|b + 2b - 2a|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \geq b$$

$$2a - 3b \geq \sqrt{5}b \quad \text{すなわち } 2a \geq (3 + \sqrt{5})b$$

よって題意を満たすのは, $3b - 2a < 0$ かつ $2a \geq (3 + \sqrt{5})b$

これをみたす (a, b) は, $(a, b) = (6, 1), (6, 2), (5, 1), (4, 1), (3, 1)$

$$\text{ゆえに, } p_2 = \frac{5}{36} \quad \cdots (\text{答})$$

