

1

(1)

$$\begin{aligned} a(1, 2) &= a(1, 1+1) \\ &= a(1, 1) + 1 + 1 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} a(1, 3) &= a(1, 2+1) \\ &= a(1, 2) + 1 + 2 - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(2, 2) &= a(1+1, 2) \\ &= a(1, 2) + 1 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a(1, 3) = 4, a(2, 2) = 5$

(2)

$$a(n, n+1) = a(n, n) + n + n - 1 = a(n, n) + 2n - 1$$

より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a(n+1, n+1) \\ &= a(n, n+1) + n + n + 1 \\ &= a(n, n) + 2n - 1 + 2n + 1 \\ &= a_n + 4n \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_{n+1} = a_n + 4n$

(3)

(2)の結果より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4k \\ &= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n \\ &= 2n^2 - 2n + 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$a_{100} = 2 \cdot (100)^2 - 2 \cdot 100 + 1 = 19801$$

となる。

(答) $a_{100} = 19801$

(1)

三角形 OAB において、余弦定理より、

$$\cos \angle AOB = \frac{a^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot a} = 1 - \frac{b^2}{2a^2}$$

となる。ここで、仮定より、

$$\sqrt{2}a < b \Leftrightarrow 2a^2 < b^2 \therefore \frac{b^2}{2a^2} > 1$$

であるから、 $\cos \angle AOB < 0$ となり、したがって、 $\frac{\pi}{2} < \angle AOB < \pi$ となるので、三角形 OAB は鈍角三角形であることが示された。

(証明終)

(2)

三角形 OAB、三角形 OBC、三角形 OCA は 3 辺の長さがどれも a, a, b であるから合同であり、したがって、 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$ となる。この共通の角を θ とすれば、(1)より、

$$\cos \theta < 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで、

$$OA' = x, OB' = y, OC' = z, A'B' = B'C' = C'A' = c$$

とおくと、三角形 $OC'A'$ と三角形 $OB'C'$ において余弦定理より、

$$c^2 = z^2 + x^2 - 2zx \cos \theta,$$

$$c^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos \theta$$

が成り立つので、両式の辺々の差をとると、

$$0 = x^2 - 2zx \cos \theta - y^2 + 2yz \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) - 2z \cos \theta \cdot (x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2z \cos \theta) = 0$$

となるが、いま、 $x > 0, y > 0, z > 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ に注意すると

$$x+y-2z \cos \theta > 0$$

であり、したがって、 $x=y$ となり、三角形 $OA'B'$ は二等辺三角形となる。

三角形 OAB と三角形 $OA'B'$ は共通の頂角 θ をもつ二等辺三角形であるから、それらの底角

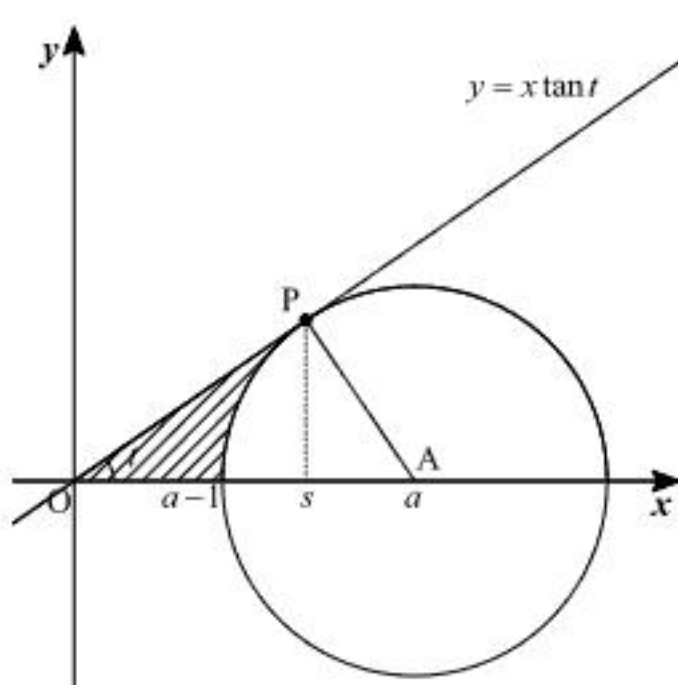
$\angle OAB, \angle OA'B'$ はともに $\frac{\pi - \theta}{2}$ で等しい。したがって、直線 AA' と直線 BB' について、直線

OA と交わってできる同位角が等しいので、これらは平行である。

(証明終)

3

(1)



上図のように、点 A の座標を $(a, 0)$ とおく。△OAP に注目すると、 $OP = a \cos t$ 、 $AP = 1$ であるので、三平方の定理より

$$\begin{aligned} a^2 &= 1 + (a \cos t)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{\sin^2 t} \\ \therefore a &= \frac{1}{\sin t} \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

が得られる。よって、点 P の x 座標を s とおくと、

$$\begin{aligned} s &= OP \cos t \\ &= OA \cos t \cdot \cos t \\ &= \frac{\cos t}{\tan t} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 点 A の } x \text{ 座標: } \frac{1}{\sin t}, \text{ 点 P の } x \text{ 座標: } \frac{\cos t}{\tan t}$$

(2)

(1)の図の斜線部を回転させたものが求める体積である。円の方程式は、

$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

であるから、これを y について解くと、 $y \geq 0$ において

$$y = \sqrt{1 - (x-a)^2}$$

となる。したがって、求める体積を立式すると、

$$V(t) = \pi \int_0^s (x \tan t)^2 dx - \pi \int_{a-1}^s \left\{ \sqrt{1 - (x-a)^2} \right\}^2 dx$$

となる。 $\int_0^s (x \tan t)^2 dx$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^s (x \tan t)^2 dx &= \tan^2 t \int_0^s x^2 dx \\ &= \tan^2 t \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^s \\ &= \tan^2 t \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos^3 t}{\tan^3 t} \\ &= \frac{\cos^3 t}{3 \tan t} \end{aligned}$$

となる。 $\int_{a-1}^s \left\{ \sqrt{1 - (x-a)^2} \right\}^2 dx$ を計算する。

$$\begin{aligned} \int_{a-1}^s \left\{ \sqrt{1 - (x-a)^2} \right\}^2 dx &= \left[x - \frac{1}{3} (x-a)^3 \right]_{a-1}^s \\ &= s - a + 1 - \frac{1}{3} (s-a)^3 - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3} (s-a)^3 + (s-a) + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $s-a$ は(1)の結果より、

$$\begin{aligned} s-a &= \frac{\cos t}{\tan t} - \frac{1}{\sin t} \\ &= \frac{\cos^2 t - 1}{\sin t} \\ &= \frac{-\sin^2 t}{\sin t} \\ &= -\sin t \end{aligned}$$

となる。以上より、 $V(t)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_0^s (x \tan t)^2 dx - \pi \int_{a-1}^s \left\{ \sqrt{1 - (x-a)^2} \right\}^2 dx \\ &= \frac{\pi \cos^3 t}{3 \tan t} + \frac{\pi}{3} (-\sin t)^3 - \pi (-\sin t) - \frac{2}{3} \pi \\ &= \frac{\pi \cos^3 t}{3 \tan t} - \frac{\pi}{3} \sin^3 t + \pi \sin t - \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V(t) = \frac{\pi \cos^3 t}{3 \tan t} - \frac{\pi}{3} \sin^3 t + \pi \sin t - \frac{2}{3} \pi$$

(3)

(2)の結果より、

$$tV(t) = \frac{\pi \cos^3 t}{3} \cdot \frac{t}{\tan t} - \frac{\pi}{3} t \cdot \sin^3 t + \pi t \cdot \sin t - \frac{2}{3} \pi t$$

となる。ここで、

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{t}{\tan t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} tV(t) &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\pi \cos^3 t}{3} \cdot \frac{t}{\tan t} - \frac{\pi}{3} t \cdot \sin^3 t + \pi t \cdot \sin t - \frac{2}{3} \pi t \right) \\ &= \frac{\pi \cdot 1}{3} \cdot 1 - \frac{\pi}{3} \cdot 0 \cdot 0 + \pi \cdot 0 \cdot 0 - \frac{2}{3} \pi \cdot 0 \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow +0} tV(t) = \frac{\pi}{3}$$