

1

(1) (イ) 3人, 1人, 1人の組に分けるととき,

A以外の2人の選び方 $\cdots \cdots {}_4C_2 = 6$ 通り

(ロ) 3人, 2人の組に分けるととき,

A以外の2人の選び方 $\cdots \cdots {}_4C_2 = 6$ 通りしたがって, $6+6=12$ 通り $\cdots \cdots$ (答)

(2) (ハ) 3人, 2人の組に分けるととき,

A以外の1人の選び方 $\cdots \cdots 4$ 通り

(ニ) 2人, 2人, 1人の組に分けるととき,

A以外の1人の選び方 $\cdots \cdots 4$ 通り残りの3人の中から, 1人だけの組になる者の選び方 $\cdots \cdots 3$ 通り

(ホ) 2人, 1人, 1人, 1人の組に分けるととき,

A以外の1人の選び方 $\cdots \cdots 4$ 通りしたがって, $4+4 \times 3+4=20$ 通り $\cdots \cdots$ (答)

(3) (ヘ) Aが5人の組に含まれる分け方は1通り

(ト) Aが4人の組に含まれるとき,



Aの組以外の1人を残り4人から選べばよいので, 4通り.

(ナ) Aが1人の組に含まれるとき,

 $\cdots \cdots 1$ 通り $\cdots \cdots {}_4C_2 = 6$ 通り $\cdots \cdots {}_4C_1 = 4$ 通り $\cdots \cdots \frac{{}_4C_2}{2} = 3$ 通り $\cdots \cdots 1$ 通り

(1), (2)および (ヘ), (ト), (ナ) より,

 $12+20+1+4+(1+6+4+3+1)=52$ 通り $\cdots$ (答)

2

(1) $\angle ADP = 60^\circ$, $\angle APD = 90^\circ$ より,

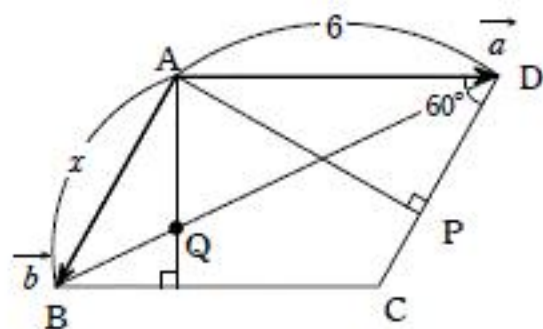
$$DP = AD \times \frac{1}{2} = 3, AP = DP \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{AQ} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ とおく. $AQ \perp AD$ より,

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

$$\{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\} \cdot \vec{a} = 0$$

$$t|\vec{a}|^2 + (1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



ここで, $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = x$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 6 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3x$ より,

$$36t - 3x(1-t) = 0$$

$$(36 + 3x)t = 3x$$

$$t = \frac{x}{12+x}$$

したがって,

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{x}{12+x}\vec{a} + \frac{12}{12+x}\vec{b} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AQ}|^2 &= \left| \frac{x}{12+x}\vec{a} + \frac{12}{12+x}\vec{b} \right|^2 = \frac{1}{(12+x)^2} (x^2|\vec{a}|^2 + 24x\vec{a} \cdot \vec{b} + 144|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{(12+x)^2} (36x^2 - 72x^2 + 144x^2) = \frac{108x^2}{(12+x)^2} \end{aligned}$$

であり, $AP^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$ より,

$$\frac{108x^2}{(12+x)^2} = 27$$

これを解いて, $x = 12, -4$

$x > 0$ より, $x = 12 \quad \dots\dots (\text{答})$

(4)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{x}{12+x}\vec{a} + \frac{12}{12+x}\vec{b} - (\vec{AD} + \vec{DP}) \\ &= \frac{x}{12+x}\vec{a} + \frac{12}{12+x}\vec{b} - \left(\vec{a} + \frac{3}{x}\vec{b} \right) \\ &= \left(\frac{x}{12+x} - 1 \right) \vec{a} + \left(\frac{12}{12+x} - \frac{3}{x} \right) \vec{b} \end{aligned}$$

$$PQ \parallel AD \text{ のとき, } \frac{12}{12+x} - \frac{3}{x} = 0$$

これを解いて, $x = 4 \quad \dots\dots (\text{答})$

$$(1) \quad f'(x) = 3x^2 - 10x = 3x\left(x - \frac{10}{3}\right)$$

増減表より,

$$\begin{cases} x=0 \text{ のとき, 極大値 } 0 \\ x=\frac{10}{3} \text{ のとき, 極小値 } -\frac{500}{27} \end{cases} \dots\dots (\text{答})$$

x	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{10}{3}$	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{500}{27}$	$\nearrow$

$$(2) \quad t^2 = (3^x + 3^{-x})^2 = 3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + 3^{-2x} = 3^{2x} + 3^{-2x} + 2$$

$$t^3 = (3^x + 3^{-x})^3 = 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-x} + 3 \cdot 3^x \cdot 3^{-2x} + 3^{-3x} = 3^{3x} + 3^{-3x} + 3(3^x + 3^{-x})$$

より,

$$g(x) = t^3 - 3t - 5(t^2 - 2) + 3t = t^3 - 5t^2 + 10 \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \text{ 相加・相乗平均の関係より, } t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2$$

よって, $y = f(x)$ のグラフを利用すれば, $g(x)$ は

$$t = \frac{10}{3} \text{ のとき最小値 } -\frac{500}{27} + 10 = -\frac{230}{27} \dots\dots (\text{答})$$

をとり, このとき, $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$ より,

$3^x = X$ とおくと,

$$X + \frac{1}{X} = \frac{10}{3}$$

$$3X^2 - 10X + 3 = 0$$

$$(3X - 1)(X - 3) = 0$$

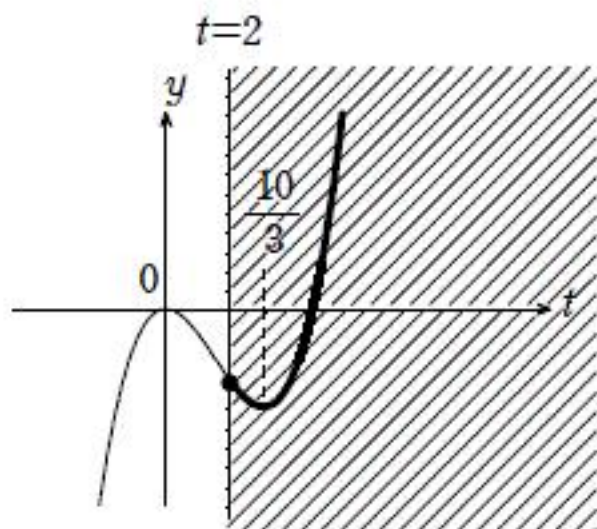
$$X = \frac{1}{3}, 3$$

これより,

$$3^x = 3^{-1}, 3^1$$

したがって,

$$x = \pm 1 \dots\dots (\text{答})$$



4

$y = k(1-x^2) - 1 = -kx^2 + k - 1$ は $-k < 0$ より, y 軸に関して対称で上に凸の放物線

(1) $x^2 = 1$ のとき, $y = -1$ より定点は $(\pm 1, -1)$ …… (答)

$$(2)(3) \quad C_2 = \begin{cases} y = 1 - x & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ y = 1 + x & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから, C_2 も y 軸に関して対称. よって $x \geq 0$ で考える.

$k-1 > 1$, すなわち, $k > 2$ のとき, C_1 と C_2 は $x > 0$

の範囲で 1 回だけ交わる.

$k-1 = 1$, すなわち, $k = 2$ のとき, C_1 と C_2 は $x = 0$

と $x > 0$ の範囲で計 2 回だけ交わる.

$-kx^2 + k - 1 = 1 - x$, すなわち, $kx^2 - x + 2 - k = 0 \cdots (*)$

が重解をもつとき, $k = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって, $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} < k < 2$ のとき, C_1 と C_2 は $x > 0$

の範囲で 2 回交わり, $k = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき, $x > 0$

の範囲で 1 回だけ接する.

さらに $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < k < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき, $(*)$ は実数解をもたないことから,

C_1 と C_2 は共有点をもたず, $k = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $x > 0$

の範囲で 1 回だけ接する.

また, $0 < k < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき, C_1 と C_2 は $x > 0$

の範囲で 2 回交わる.

対称性に注意してまとめると,

$$0 < k \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq k$$

のとき, C_1 と C_2 は共有点をもち,
その個数は

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 2 \text{ のとき, 2 個} \\ k = 2 \text{ のとき, 3 個} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} < k < 2 \text{ のとき, 4 個} \\ k = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき, 2 個} \\ 0 < k < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき, 4 個} \end{array} \right. \quad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

