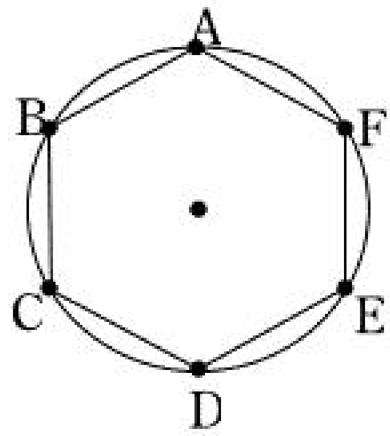
$\boxed{1}$

(1)　全場合の数……${}_7C_3=35$（通り）

3 点が一直線上……



$$(\mathrm{A},\mathrm{O},\mathrm{D}),\ (\mathrm{F},\mathrm{O},\mathrm{C}),\ (\mathrm{E},\mathrm{O},\mathrm{B})$$

の 3 通り．ゆえに，

$\dfrac{3}{35}$　……（答）

(2)　3 点を結ぶと正 3 角形……

$$(\mathrm{A},\mathrm{C},\mathrm{E}),\ (\mathrm{F},\mathrm{B},\mathrm{D}) \qquad (1\text{辺}\sqrt{3})$$

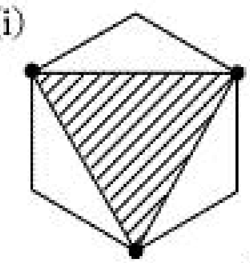
$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{O},\mathrm{A},\mathrm{B}),\ (\mathrm{O},\mathrm{F},\mathrm{A}),\ (\mathrm{O},\mathrm{E},\mathrm{F})\\(\mathrm{O},\mathrm{D},\mathrm{E}),\ (\mathrm{O},\mathrm{C},\mathrm{D}),\ (\mathrm{O},\mathrm{B},\mathrm{C})\end{array}\right\} \qquad (1\text{辺}1)$$

の 8 通り．ゆえに，

$\dfrac{8}{35}$　……（答）

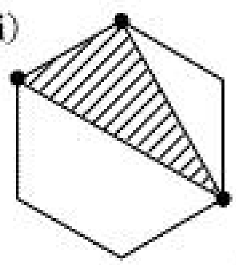
(3) 面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ より大きくなるのは(i)または(ii)の場合．

(i)



……2 通り

(ii)



……12 通り

したがって，

$\dfrac{14}{35}=\dfrac{2}{5}$　……（答）

2

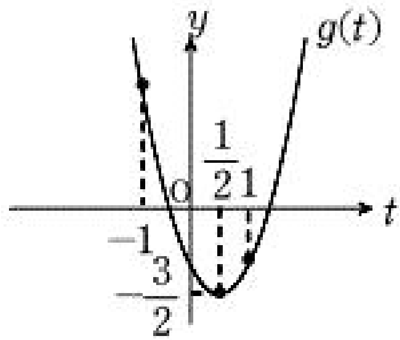
$t=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$ ……①

(1) $t^2=\frac{1}{2}\cos^2 x-\sin x\cos x+\frac{1}{2}\sin^2 x=\frac{1}{2}-\sin x\cos x \iff \sin x\cos x=\frac{1}{2}-t^2$ ……②

$$\begin{aligned} f(x)&=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x-\sin 2x \\ &=-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)-2\sin x\cos x \\ &=-2t-2\left(\frac{1}{2}-t^2\right) \quad (①, ②より) \\ &=2t^2-2t-1 \quad \cdots\cdots (答) \end{aligned}$$

(2) $t=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ より，$-1\leqq t\leqq 1$

$$\begin{aligned} g(t)&=2t^2-2t-1 \\ &=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2} \end{aligned}$$



$t=-1$ のとき，$x=\frac{3}{4}\pi+2n\pi$（n は整数）

$t=\frac{1}{2}$ のとき，　$x=\frac{1}{12}\pi+2n\pi$ または $x=\frac{17}{12}\pi+2n\pi$（n は整数）

したがって，

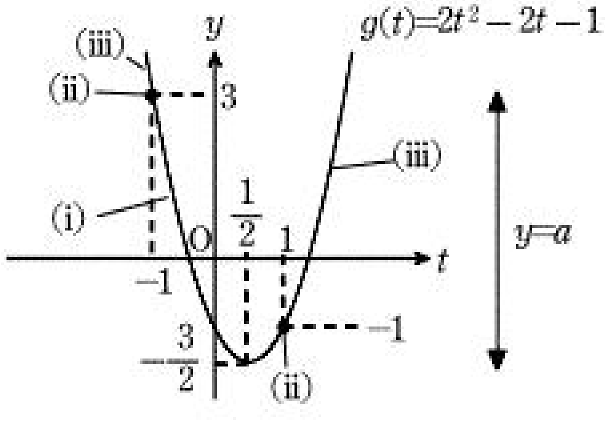
最大値：3　$\left(x=\frac{3}{4}\pi+2n\pi\right)$

最小値：$-\frac{3}{2}$　$\left(x=\frac{1}{12}\pi+2n\pi \text{ または } x=\frac{17}{12}\pi+2n\pi\right)$ ……（答）

(3) $0\leqq x<2\pi$ の範囲で，$t=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ と x の実数解の個数の対応を考える．

$y=g(t)$ と $y=a$ の共有点を考えて，

	tの個数	xの個数	
$\lvert t\rvert<1$	1個	2個	……(i)
$\lvert t\rvert=1$	1個	1個	……(ii)
$\lvert t\rvert>1$	1個	0個	……(iii)



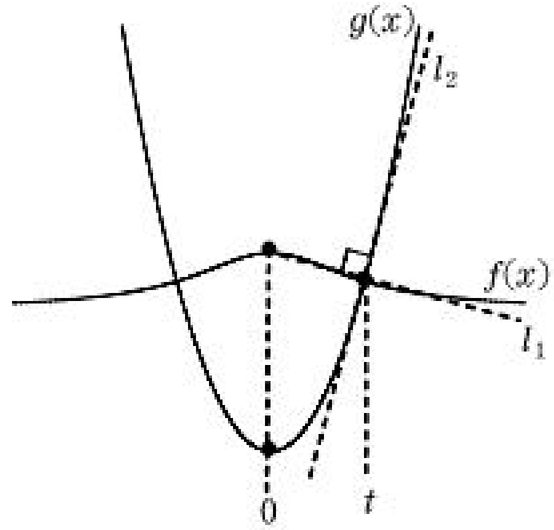
上図より

$a=-\frac{3}{2}$, $-1<a<3$ ……（答）

$\boxed{3}$

(1) $C_1 : f(x)=\dfrac{3}{x^2+3},\ f'(x)=\dfrac{-6x}{(x^2+3)^2}$

$C_2 : g(x)=x^2+k,\ g'(x)=2x$



$x=t$ で $l_1 \perp l_2$ より，

$$\frac{-6t}{(t^2+3)^2}\cdot 2t=-1 \iff t^4-6t^2+9=0$$

$$\iff (t^2-3)^2=0$$

$$\therefore t=\pm\sqrt{3}$$

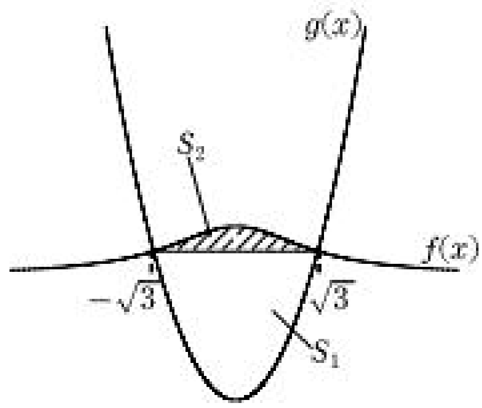
y 座標を考えて，

$$f(\sqrt{3})=g(\sqrt{3}) \iff \frac{1}{2}=3+k$$

$$\therefore k=-\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots（答）$$

共有点は $\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right),\ \left(-\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ ……（答）

(2) $S_1=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right)^3=4\sqrt{3}$



$$\begin{aligned}S_2&=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{x^2+3}-\frac{1}{2}\right)dx\\&=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{x^2+3}-\frac{1}{2}\right)dx\\&=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}\,dx-2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}dx\\&=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}\,dx-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$T=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}dx$ とする．

$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とすると，

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta} \iff dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

x	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}T=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{3(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{3}\,d\theta\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi\end{aligned}$$

したがって

$$S=S_1+S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+3\sqrt{3} \quad \cdots\cdots（答）$$