

(1)

部分積分を用いて変形すると、与えられた不定積分は

$$\begin{aligned}\int e^{-2x} \cos 2x dx &= \frac{1}{2} e^{-2x} \sin 2x - \int \frac{1}{2} (-2) e^{-2x} \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} e^{-2x} \sin 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2}\right) (-2) e^{-2x} \cos 2x dx\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2 \int e^{-2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{-2x} (\sin 2x - \cos 2x) + C_1$$

$$\therefore \int e^{-2x} \cos 2x dx = \frac{1}{4} e^{-2x} (\sin 2x - \cos 2x) + C_2$$

と求まる。ここで C_1, C_2 は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} e^{-2x} (\sin 2x - \cos 2x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2)

区間 $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ において、曲線 $y = e^{-x} \sin x$ と x 軸 ($y=0$) の位置関係は以下の表のようになる。

	$(n-1)\pi$	$\dots$	$n\pi$
n が奇数のとき	$e^{-x} \sin x = 0$	$e^{-x} \sin x > 0$	$e^{-x} \sin x = 0$
n が偶数のとき	$e^{-x} \sin x = 0$	$e^{-x} \sin x < 0$	$e^{-x} \sin x = 0$

よって、求める体積は n が奇数のときも偶数のときも

$$V_n = \pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (e^{-x} \sin x)^2 dx$$

と立式でき、ここで三角関数の半角公式と(1)の結果を用いることで

$$\begin{aligned}V_n &= \pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-2x} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-2x} dx - \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-2x} \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} (\sin 2x - \cos 2x) \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-2n\pi} + \frac{1}{2} e^{-2(n-1)\pi} + \frac{1}{4} e^{-2n\pi} - \frac{1}{4} e^{-2(n-1)\pi} \right) \\ &= \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1) e^{-2n\pi}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1) e^{-2n\pi}$$

(3)

(2)の結果より、 $n \geq 1$ のとき

$$V_{2n-1} = \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1) e^{-2(2n-1)\pi} = \frac{\pi}{8} e^{2\pi} (e^{2\pi} - 1) e^{-4n\pi}$$

であるから、数列 $\{V_{2n-1}\}$ は初項 $V_1 = \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1) e^{-2\pi}$ 、公比 $e^{-4\pi}$ ($0 < e^{-4\pi} < 1$) の等比数列となる。

よって、求める無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} V_{2n-1}$ の値は

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} V_{2n-1} &= \frac{\frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1) e^{-2\pi}}{1 - e^{-4\pi}} \\ &= \frac{\pi}{8} e^{2\pi} \frac{e^{2\pi} - 1}{e^{4\pi} - 1} \\ &= \frac{\pi}{8} e^{2\pi} \frac{e^{2\pi} - 1}{(e^{2\pi} - 1)(e^{2\pi} + 1)} \\ &= \frac{\pi e^{2\pi}}{8(e^{2\pi} + 1)}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi e^{2\pi}}{8(e^{2\pi} + 1)}$$

3

(1)

傾き m 、 y 切片 k の直線 $y = mx + k$ が楕円 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ に接するのは、これら 2 式から y を

消去して得られる 2 次方程式

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{16} + \frac{(mx+k)^2}{9} &= 1 \\ \Leftrightarrow (16m^2+9)x^2 + 32mkx + 16k^2 - 144 &= 0\end{aligned}$$

が重解を持つときであるから、上式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (16mk)^2 - (16m^2+9) \cdot (16k^2-144) &= 0 \\ \Leftrightarrow 16m^2k^2 - (16m^2+9) \cdot (k^2-9) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9k^2 &= 144m^2 + 81 \\ \Leftrightarrow k^2 &= 16m^2 + 9 \quad (>0) \\ \therefore k &= \pm\sqrt{16m^2+9}\end{aligned}$$

となり、 k についての条件が求まる。よって、求める直線の方程式は

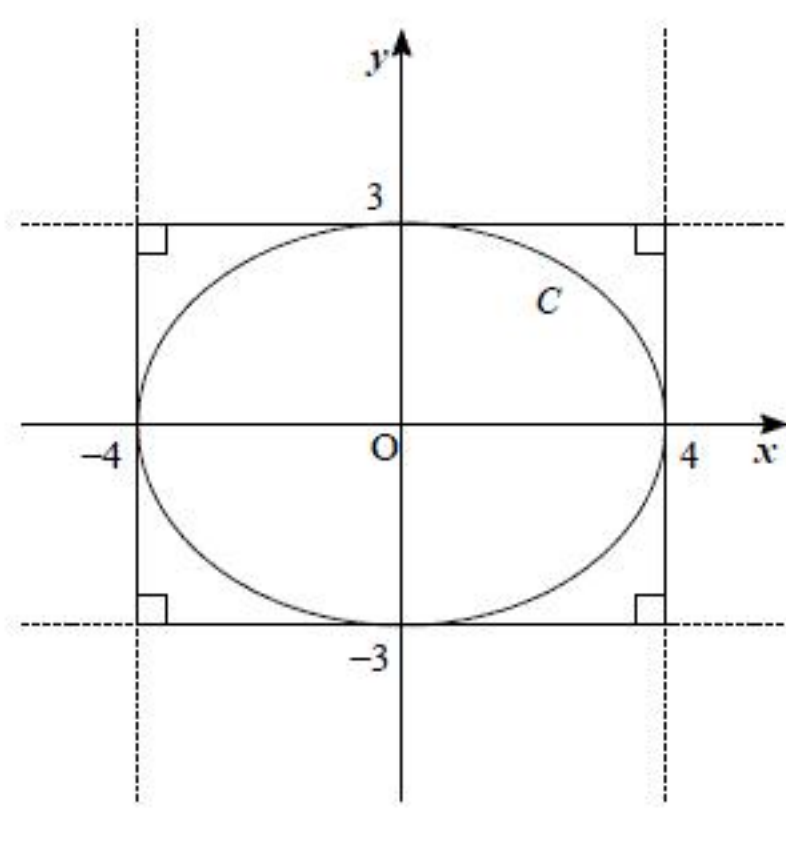
$$y = mx + \sqrt{16m^2+9}, y = mx - \sqrt{16m^2+9}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = mx + \sqrt{16m^2+9}, \quad y = mx - \sqrt{16m^2+9}$$

(2)

$m=0$ のとき、すべての辺が C に接する長方形の各辺は x 軸または y 軸に平行であるから、長方形の概形は以下になる。



このとき、長方形の面積は

$$S(m) = 8 \cdot 6 = 48$$

である。

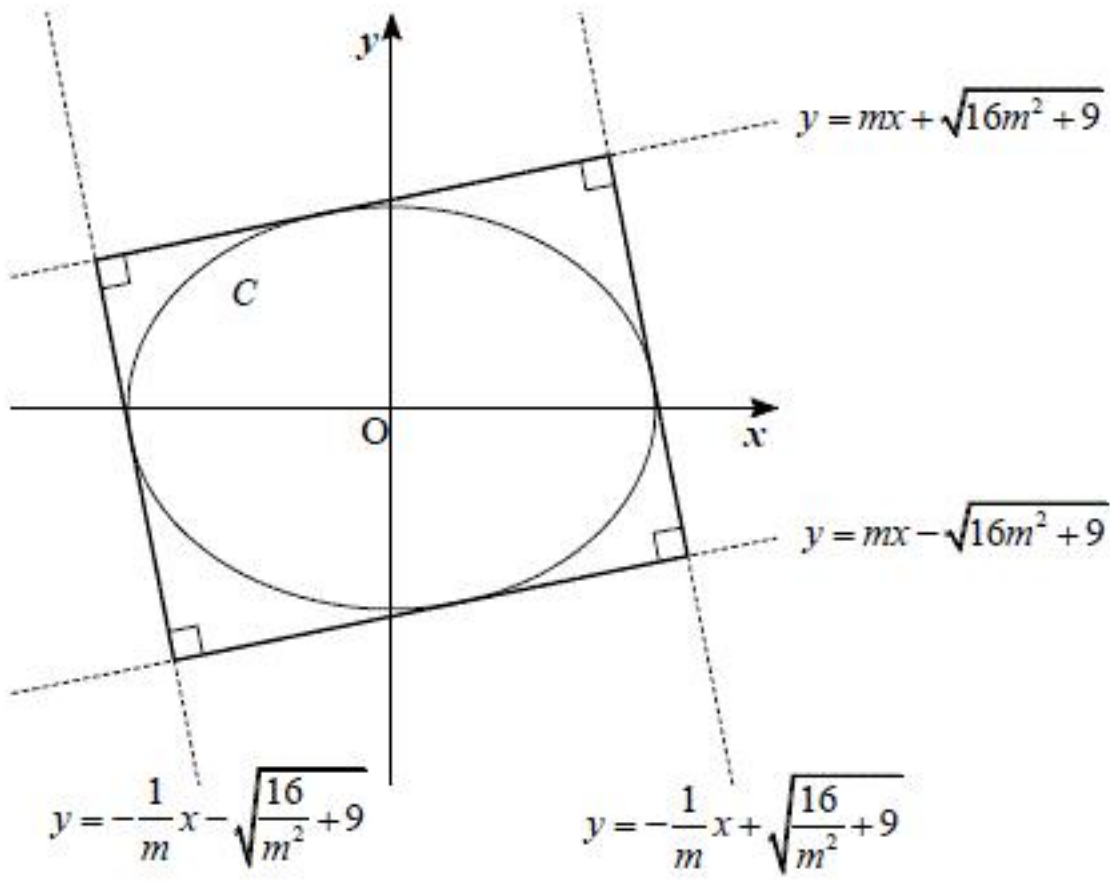
$m \neq 0$ のとき、(1)の結果より C に接する傾き m の直線は

$$y = mx \pm \sqrt{16m^2+9}$$

である。また、傾き m の直線に垂直かつ C に接する直線は、上式の m を $-\frac{1}{m}$ に置き換えることにより

$$y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{\frac{16}{m^2}+9}$$

と求められる。したがって、長方形の概形は以下になる。



ここで、直線 l_1, l_2 を

$$\begin{aligned}l_1: y &= mx + \sqrt{16m^2+9} \\ l_2: y &= -\frac{1}{m}x + \sqrt{\frac{16}{m^2}+9}\end{aligned}$$

とし、直線 l_1, l_2 と原点 $O(0, 0)$ の距離をそれぞれ d_1, d_2 とすると、点と直線の距離の公式より

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{|\sqrt{16m^2+9}|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}} \\ d_2 &= \frac{|\sqrt{\frac{16}{m^2}+9}|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}\end{aligned}$$

である。長方形の隣り合う 2 辺の長さは $2d_1, 2d_2$ であるから、したがって、長方形の面積は

$$\begin{aligned}S(m) &= 2d_1 \cdot 2d_2 \\ &= \frac{2\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}} \cdot \frac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}} \\ &= \frac{4\sqrt{16m^2+9}\sqrt{9m^2+16}}{m^2+1}\end{aligned}$$

となる。

さらに、 $S(m) = \frac{4\sqrt{16m^2+9}\sqrt{9m^2+16}}{m^2+1}$ に $m=0$ を代入すると

$$S(0) = \frac{4\sqrt{16 \cdot 0 + 9}\sqrt{9 \cdot 0 + 16}}{0+1} = 48$$

となるから、これは $m=0$ のときも成り立つ。したがって、任意の実数 m について

$$S(m) = \frac{4\sqrt{16m^2+9}\sqrt{9m^2+16}}{m^2+1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S(m) = \frac{4\sqrt{16m^2+9}\sqrt{9m^2+16}}{m^2+1}$$

(3)

(2)の結果より、 $S(m)$ を変形すると

$$\begin{aligned}S(m) &= \frac{4\sqrt{16m^2+9}\sqrt{9m^2+16}}{m^2+1} \\ &= 4\sqrt{\frac{16m^2+9}{m^2+1} \cdot \frac{9m^2+16}{m^2+1}} \\ &= 4\sqrt{\left(16 - \frac{7}{m^2+1}\right)\left(9 + \frac{7}{m^2+1}\right)}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $t = \frac{7}{m^2+1}$ とおき、2 次関数 $(16-t)(9+t)$ について調べると

$$(16-t)(9+t) = -t^2 + 7t + 144 = -\left(t - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{625}{4}$$

より、 $t = \frac{7}{2}$ のとき最大値 $\frac{625}{4}$ をとることがわかる。 $t = \frac{7}{2}$ となる m の値は

$$t = \frac{7}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1$$

より、確かに存在するから、このとき $S(m)$ は最大値 $4\sqrt{\frac{625}{4}} = 50$ をとることがわかる。

(答) 50