

1

$$(1) \quad (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3-3xyz \quad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

$$(2) \quad x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2 \geq 0$$

よって、 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ のとき、(1)より、

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0$$

$$\therefore \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz$$

$x^3=a, y^3=b, z^3=c$ (a, b, c は非負の実数) とおけば、

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \square$$

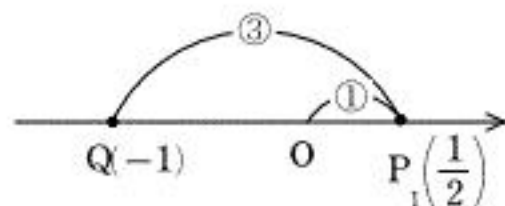
等号成立は、

$$x=y=z$$

すなわち、

$$a=b=c \text{ のとき} \quad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

(1)



$$OQ = 1, OP_1 = \frac{1}{2} \text{ より,}$$

$$QP_1 : P_1O = 3 : 1$$

よって, $O = A$ であるから,

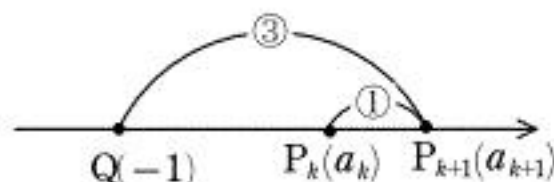
$$a = 0 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) $n=1$ のとき,

$$a_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^1 - 1 = \frac{1}{2} \quad P_1\left(\frac{1}{2}\right) \text{ より, これは成立.}$$

$n=k$ のとき, 成り立つと仮定, すなわち, $P_k(a_k)$ において, $a_k = \left(\frac{3}{2}\right)^k - 1$ と仮定.

このとき, $QP_{k+1} : P_{k+1}P_k = 3 : 1, a_{k+1} > a_k > -1$ より,



$$a_{k+1} - (-1) = 3(a_{k+1} - a_k)$$

$$2a_{k+1} = 3a_k + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{k+1} &= \frac{3}{2}a_k + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1\right] + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときにも成り立つので, すべての自然数 n に対して,

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \quad \square$$

(3) (2)の結果より,

$$1000 < \left(\frac{3}{2}\right)^n < 10000, \log_{10} 10^3 < \log_{10} \left(\frac{3}{2}\right)^n < \log_{10} 10^4, 3 < n(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) < 4$$

$\log_{10} 3 = 0.4771, \log_{10} 2 = 0.3010$ より,

$$\frac{3}{0.1761} < n < \frac{4}{0.1761}$$

$$17.03\dots < n < 22.71\dots$$

よって,

$$n = 18, 19, 20, 21, 22 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1)

$$(1-p)(1-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
$$(2-p)(2-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$
$$(3-p)(3-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$
$$(4-p)(4-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$
$$(5-p)(5-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$
$$(6-p)(6-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$p=1 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ 成立}$$
$$\textcircled{2} \ 2-q < 0 \quad \therefore q=3, 4, 5, 6$$
$$\textcircled{3} \ 3-q \geq 0 \quad \therefore q=1, 2, 3$$
$$\textcircled{4} \ 4-q \geq 0 \quad \therefore q=1, 2, 3, 4$$
$$\textcircled{5} \ 5-q \geq 0 \quad \therefore q=1, 2, 3, 4, 5$$
$$\textcircled{6} \ 6-q \geq 0 \quad \therefore q=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\text{よって, } (p, q)=(1, 3) \text{ のみ.}$$

$p=2$ のとき, ②が成立しないので, (p, q) の組は存在しない.

$$p=3 \text{ のとき,}$$
$$\textcircled{1} \ 1-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 1$$
$$\textcircled{2} \ 2-q > 0 \quad \therefore q=1$$
$$\textcircled{3} \text{ 成立}$$
$$\textcircled{4} \ 4-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 4$$
$$\textcircled{5} \ 5-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 5$$
$$\textcircled{6} \ 6-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 6$$

$$\text{よって, } (p, q)=(3, 1) \text{ のみ.}$$

$$p=4 \text{ のとき,}$$
$$\textcircled{1} \ 1-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 1$$
$$\textcircled{2} \ 2-q > 0 \quad \therefore q=1$$
$$\textcircled{3} \ 3-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 3$$
$$\textcircled{4} \text{ 成立}$$
$$\textcircled{5} \ 5-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 5$$
$$\textcircled{6} \ 6-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 6$$

$$\text{これらをすべてみたす } (p, q) \text{ の組は存在しない.}$$

$$p=5 \text{ のとき,}$$
$$\textcircled{1} \ 1-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 1$$
$$\textcircled{2} \ 2-q > 0 \quad \therefore q=1$$
$$\textcircled{3} \ 3-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 3$$
$$\textcircled{4} \ 4-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 4$$
$$\textcircled{5} \text{ 成立}$$
$$\textcircled{6} \ 6-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 6$$

$$\text{これらをすべてみたす } (p, q) \text{ の組は存在しない.}$$

$$p=6 \text{ のとき,}$$
$$\textcircled{1} \ 1-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 1$$
$$\textcircled{2} \ 2-q > 0 \quad \therefore q=1$$
$$\textcircled{3} \ 3-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 3$$
$$\textcircled{4} \ 4-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 4$$
$$\textcircled{5} \ 5-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 5$$
$$\textcircled{6} \text{ 成立}$$

$$\text{これらをすべてみたす } (p, q) \text{ の組は存在しない}$$

以上より, 2 だけ書かれるのは $(p, q)=(1, 3), (3, 1)$ の 2 通りであるから,

$$\text{確率は, } \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

(2)

$$(1-p)(1-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$
$$(2-p)(2-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$
$$(3-p)(3-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$
$$(4-p)(4-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$
$$(5-p)(5-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{11}$$
$$(6-p)(6-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{12}$$

$$p=1 \text{ のとき, } \textcircled{7} \text{ 成立}$$
$$\textcircled{8} \ 2-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 2$$
$$\textcircled{9} \ 3-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 3$$
$$\textcircled{10} \ 4-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 4$$
$$\textcircled{11} \ 5-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 5$$
$$\textcircled{12} \ 6-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 6$$

$$\text{よって, } (p, q)=(1, 1), (1, 2)$$

$$p=2 \text{ のとき,}$$
$$\textcircled{7} \ 1-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 1$$
$$\textcircled{8} \text{ 成立}$$
$$\textcircled{9} \ 2-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 3$$
$$\textcircled{10} \ 4-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 4$$
$$\textcircled{11} \ 5-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 5$$
$$\textcircled{12} \ 6-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 6$$

$$\text{よって, } (p, q)=(2, 1), (2, 2), (2, 3)$$

$$p=3 \text{ のとき,}$$
$$\textcircled{7} \ 1-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 1$$
$$\textcircled{8} \ 2-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 2$$
$$\textcircled{9} \text{ 成立}$$
$$\textcircled{10} \ 4-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 4$$
$$\textcircled{11} \ 5-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 5$$
$$\textcircled{12} \ 6-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 6$$

$$\text{よって, } (p, q)=(3, 2), (3, 3), (3, 4)$$

$$p=4 \text{ のとき,}$$
$$\textcircled{7} \ 1-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 1$$
$$\textcircled{8} \ 2-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 2$$
$$\textcircled{9} \ 3-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 3$$
$$\textcircled{10} \text{ 成立}$$
$$\textcircled{11} \ 5-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 5$$
$$\textcircled{12} \ 6-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 6$$

$$\text{よって, } (p, q)=(4, 3), (4, 4), (4, 5)$$

$$p=5 \text{ のとき,}$$
$$\textcircled{7} \ 1-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 1$$
$$\textcircled{8} \ 2-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 2$$
$$\textcircled{9} \ 3-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 3$$
$$\textcircled{10} \ 4-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 4$$
$$\textcircled{11} \text{ 成立}$$
$$\textcircled{12} \ 6-q \geq 0 \quad \therefore q \leq 6$$

$$\text{よって, } (p, q)=(5, 4), (5, 5), (5, 6)$$

$$p=6 \text{ のとき,}$$
$$\textcircled{7} \ 1-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 1$$
$$\textcircled{8} \ 2-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 2$$
$$\textcircled{9} \ 3-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 3$$
$$\textcircled{10} \ 4-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 4$$
$$\textcircled{11} \ 5-q \leq 0 \quad \therefore q \geq 5$$
$$\textcircled{12} \text{ 成立}$$

$$\text{よって, } (p, q)=(6, 5), (6, 6)$$

$$\text{以上より, 何も書かれないのは}$$
$$(p, q)=(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4),$$
$$(4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)$$

$$\text{の } 16 \text{ 通りであるから,}$$
$$\text{確率は, } \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \quad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

$$(3) \quad B=\{2, 3, 5\} \text{ であるから, } B \text{ の部分集合は}$$
$$\phi, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}$$

$$A=\{3\} \text{ となるとき,}$$
$$(1-p)(1-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{13}$$
$$(2-p)(2-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{14}$$
$$(3-p)(3-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{15}$$
$$(4-p)(4-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{16}$$
$$(5-p)(5-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{17}$$
$$(6-p)(6-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{18}$$

$p=1$ のとき, ⑬ 成立 ⑭ $2-q \geq 0$ ⑮ $3-q < 0$ ⑯ $4-q \geq 0$ ⑰ $5-q \geq 0$ ⑱ $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=2$ のとき, ⑬ $1-q \leq 0$ ⑭ 成立 ⑮ $3-q < 0$ ⑯ $4-q \geq 0$ ⑰ $5-q \geq 0$ ⑱ $6-q \geq 0$ $\therefore (p, q)=(2, 4)$	$p=3$ のとき, ⑬ $1-q \leq 0$ よって, 存在せず.
--	--	---

$p=4$ のとき, ⑬ $1-q \leq 0$ ⑭ $2-q \leq 0$ ⑮ $3-q > 0$ ⑯ 成立 ⑰ $5-q \geq 0$ ⑱ $6-q \geq 0$ $\therefore (p, q)=(4, 2)$	$p=5$ のとき, ⑬ $1-q \leq 0$ ⑭ $2-q \leq 0$ ⑮ $3-q > 0$ ⑯ $4-q \leq 0$ ⑰ 成立 ⑱ $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=6$ のとき, ⑬ $1-q \leq 0$ ⑭ $2-q \leq 0$ ⑮ $3-q > 0$ ⑯ $4-q \leq 0$ ⑰ $5-q \geq 0$ ⑱ 成立 よって, 存在せず.
--	--	--

$$\text{以上より, } A=\{3\} \text{ となる確率は, } \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$A=\{5\} \text{ となるとき,}$$
$$(1-p)(1-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{19}$$
$$(2-p)(2-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{20}$$
$$(3-p)(3-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{21}$$
$$(4-p)(4-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{22}$$
$$(5-p)(5-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{23}$$
$$(6-p)(6-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{24}$$

$p=1$ のとき, (19) 成立 (20) $2-q \geq 0$ (21) $3-q \geq 0$ (22) $4-q \geq 0$ (23) $5-q < 0$ (24) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=2$ のとき, (19) $1-q \leq 0$ (20) 成立 (21) $3-q \geq 0$ (22) $4-q \geq 0$ (23) $5-q < 0$ (24) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=3$ のとき, (19) $1-q \leq 0$ (20) $2-q \leq 0$ (21) 成立 (22) $4-q \geq 0$ (23) $5-q < 0$ (24) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.
--	--	--

$p=4$ のとき, (19) $1-q \leq 0$ (20) $2-q \leq 0$ (21) $3-q \leq 0$ (22) 成立 (23) $5-q < 0$ (24) $6-q \geq 0$ よって, $(p, q)=(4, 6)$	$p=5$ のとき, (23) が不成立. よって, 存在せず.	$p=6$ のとき, (19) $1-q \leq 0$ (20) $2-q \leq 0$ (21) $3-q \leq 0$ (22) $4-q \leq 0$ (23) $5-q > 0$ (24) 成立 よって, $(p, q)=(6, 4)$
--	-------------------------------------	--

$$\text{以上より, } A=\{5\} \text{ となる確率は, } \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$A=\{2, 3\} \text{ となるとき,}$$
$$(1-p)(1-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{25}$$
$$(2-p)(2-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{26}$$
$$(3-p)(3-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{27}$$
$$(4-p)(4-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{28}$$
$$(5-p)(5-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{29}$$
$$(6-p)(6-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{30}$$

$p=1$ のとき, (25) 成立 (26) $2-q < 0$ (27) $3-q < 0$ (28) $4-q \geq 0$ (29) $5-q \geq 0$ (30) $6-q \geq 0$ よって, $(p, q)=(1, 4)$	$p=2$ のとき, (26) が不成立. よって, 存在せず.	$p=3$ のとき, (27) が不成立. よって, 存在せず.
---	-------------------------------------	-------------------------------------

$p=4$ のとき, (25) $1-q \leq 0$ (26) $2-q > 0$ (27) $3-q > 0$ (28) 成立 (29) $5-q \geq 0$ (30) $6-q \geq 0$ よって, $(p, q)=(4, 1)$	$p=5$ のとき, (25) $1-q \leq 0$ (26) $2-q > 0$ (27) $3-q > 0$ (28) $4-q \leq 0$ (29) 成立 (30) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=6$ のとき, (25) $1-q \leq 0$ (26) $2-q > 0$ (27) $3-q > 0$ (28) $4-q \leq 0$ (29) $6-q \leq 0$ (30) 成立 よって, 存在せず.
---	---	---

$$\text{以上より, } A=\{2, 3\} \text{ となる確率は, } \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$A=\{2, 5\} \text{ となるとき,}$$
$$(1-p)(1-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{31}$$
$$(2-p)(2-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{32}$$
$$(3-p)(3-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{33}$$
$$(4-p)(4-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{34}$$
$$(5-p)(5-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{35}$$
$$(6-p)(6-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{36}$$

$p=1$ のとき, (31) 成立 (32) $2-q < 0$ (33) $3-q \geq 0$ (34) $4-q \geq 0$ (35) $5-q < 0$ (36) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=2$ のとき, (32) が不成立. よって, 存在せず.	$p=3$ のとき, (31) $1-q \leq 0$ (32) $2-q > 0$ (33) 成立 (34) $4-q \geq 0$ (35) $5-q < 0$ (36) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.
---	-------------------------------------	---

$p=4$ のとき, (31) $1-q \leq 0$ (32) $2-q > 0$ (33) $3-q \leq 0$ (34) 成立 (35) $5-q < 0$ (36) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=5$ のとき, (35) が不成立. よって, 存在せず.	$p=6$ のとき, (31) $1-q \leq 0$ (32) $2-q > 0$ (33) $3-q \leq 0$ (34) $4-q \leq 0$ (35) $5-q > 0$ (36) 成立 よって, 存在せず.
---	-------------------------------------	---

以上より, $A=\{2, 5\}$ となる確率は, 0

$$A=\{3, 5\} \text{ となるとき,}$$
$$(1-p)(1-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{37}$$
$$(2-p)(2-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{38}$$
$$(3-p)(3-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{39}$$
$$(4-p)(4-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{40}$$
$$(5-p)(5-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{41}$$
$$(6-p)(6-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{42}$$

$p=1$ のとき, (37) 成立 (38) $2-q \geq 0$ (39) $3-q < 0$ (40) $4-q \geq 0$ (41) $5-q < 0$ (42) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=2$ のとき, (37) $1-q \leq 0$ (38) 成立 (39) $3-q < 0$ (40) $4-q \geq 0$ (41) $5-q < 0$ (42) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=3$ のとき, (39) が不成立. よって, 存在せず.
---	---	-------------------------------------

$p=4$ のとき, (37) $1-q \leq 0$ (38) $2-q \geq 0$ (39) $3-q > 0$ (40) 成立 (41) $5-q < 0$ (42) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=5$ のとき, (41) が不成立. よって, 存在せず.	$p=6$ のとき, (37) $1-q \leq 0$ (38) $2-q \leq 0$ (39) $3-q > 0$ (40) $4-q \geq 0$ (41) $5-q > 0$ (42) 成立 よって, 存在せず.
---	-------------------------------------	---

以上より, $A=\{3, 5\}$ となる確率は, 0

$$A=\{2, 3, 5\} \text{ となるとき,}$$
$$(1-p)(1-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{43}$$
$$(2-p)(2-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{44}$$
$$(3-p)(3-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{45}$$
$$(4-p)(4-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{46}$$
$$(5-p)(5-q) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{47}$$
$$(6-p)(6-q) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{48}$$

$p=1$ のとき, (43) 成立 (44) $2-q < 0$ (45) $3-q < 0$ (46) $4-q \geq 0$ (47) $5-q < 0$ (48) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=2$ のとき, (44) が不成立. よって, 存在せず.	$p=3$ のとき, (45) が不成立. よって, 存在せず.
--	-------------------------------------	-------------------------------------

$p=4$ のとき, (43) $1-q \leq 0$ (44) $2-q > 0$ (45) $3-q > 0$ (46) 成立 (47) $5-q < 0$ (48) $6-q \geq 0$ よって, 存在せず.	$p=5$ のとき, (47) が不成立. よって, 存在せず.	$p=6$ のとき, (43) $1-q \leq 0$ (44) $2-q > 0$ (45) $3-q > 0$ (46) $4-q \leq 0$ (47) $5-q \leq 0$ (48) 成立 よって, 存在せず.
--	-------------------------------------	---

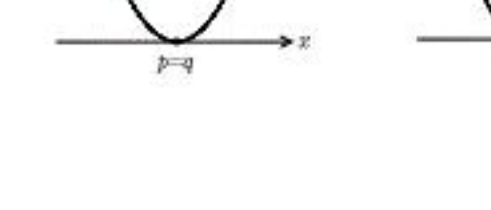
以上より, $A=\{2, 3, 5\}$ となる確率は, 0

$$\text{したがって, } A \text{ が } B \text{ の部分集合となる確率は, } A=\{2, 3, 5\} \text{ となるとき,}$$
$$\frac{4}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + 0 + 0 + 0 = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

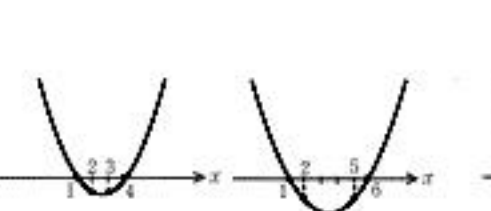
【参照】



(1) 放物線 $y=(x-p)(x-q)$ 上にあり, x 軸より下方にある格子点が $x=2$ のときだけとなるとき
 $(p, q)=(2 \pm 1, 2 \mp 1)$ (複号同順)



(2) 存在しないとき,
 $p=q$ または $|p-q|=1$
 $(p, q)=(2 \pm 1, 2 \mp 1)$ (複号同順)



(3) $A=\{2, 3\}$ のとき,
 $(p, q)=(1, 4), (4, 1)$
グラフより, $A=\{2, 5\}$ のように,
2 と 5 の間がぬけることはありえない.

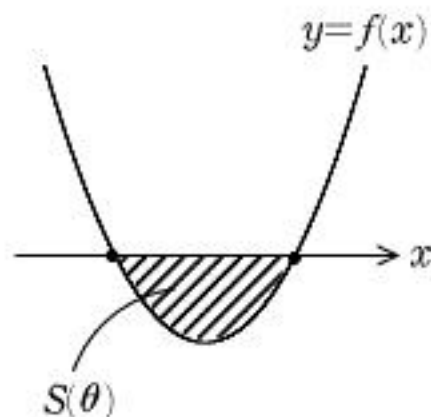
(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x - \cos \theta)^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \sin \theta + \frac{1}{2} \\
 &= (x - \cos \theta)^2 + \sin \theta - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

より、頂点の座標は $\left(\cos \theta, \sin \theta - \frac{1}{2}\right)$ (答)

$$(2) \quad \sin \theta - \frac{1}{2} < 0 \text{ のとき, } \sin \theta < \frac{1}{2} \quad \therefore 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi \quad \text{..... (答)}$$

(3)



$f(x) = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
 x &= \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \sin \theta - \frac{1}{2}} \\
 &= \cos \theta \pm \sqrt{-\sin \theta + \frac{1}{2}} \\
 S(\theta) &= \int_{\cos \theta - \sqrt{-\sin \theta + \frac{1}{2}}}^{\cos \theta + \sqrt{-\sin \theta + \frac{1}{2}}} \{0 - f(x)\} dx \\
 &= \frac{1}{6} \left(2\sqrt{-\sin \theta + \frac{1}{2}} \right)^3 = \frac{4}{3} \left(\sqrt{-\sin \theta + \frac{1}{2}} \right)^3
 \end{aligned}$$

$-\sin \theta + \frac{1}{2}$ が最大するとき、 $S(\theta)$ も最大となるので、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より、 $\sin \theta = -1$ 、すなわち、

$$\theta = \frac{3}{2}\pi \quad \text{..... (答)}$$

のとき、 $S(\theta)$ は最大値

$$S\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{4}{3} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6} \quad \text{..... (答)}$$

をとる、