1

(1)　$0 \leqq a_n \leqq 1$　……①

[1]　$n=1$ のとき，$a_1=a$．

条件より，$0 \leqq a \leqq 1$ なので，①は成立．

[2]　$n=k$ のとき，①の成立を仮定．

$$0 \leqq a_k \leqq 1 \cdots\cdots ②$$

②より，　$0 \leqq a_k{}^2 \leqq 1$　また，$0 \leqq b \leqq 1$　より

$$0 \leqq a_k{}^2 + b \leqq 2$$

よって，

$$0 \leqq \frac{1}{2}(a_k{}^2 + b) \leqq 1 \iff 0 \leqq a_k \leqq 1$$

したがって，①は $n=k+1$ のときも成立

[1][2]から，数学的帰納法により全ての自然数 n で①が成立する．　　（証明終）

(2)　$$a_{n+1} - c - \frac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$$

$$= \frac{1}{2}(a_n{}^2 + b) - c - \frac{1}{2}(a_n{}^2 - c^2)$$
$$= \frac{1}{2}b - c + \frac{1}{2}c^2$$
$$= \frac{1}{2}b - (1 - \sqrt{1-b}) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-b})^2$$
$$= 0$$

ゆえに，$a_{n+1} - c = \frac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$　　（証明終）

(3)　(2)より

$$a_n - c = \frac{1}{2}(a_{n-1} + c)(a_{n-1} - c) \cdots\cdots ③$$

ここで，

$0 \leqq a_n \leqq 1$ （(1)より），$0 \leqq c = 1 - \sqrt{1-b} < 1$

であるから，③において

$$0 \leqq \frac{1}{2}(a_{n-1} + c) = r < 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n - c) = \lim_{n\to\infty} r^{n-1}(a - c) = 0$$

よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = c$　　（証明終）

2

(1) $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$

$= \underline{\underline{x\sin x + \cos x + C}}$ （C は積分定数）

(2) $f(0) = 2\cdot 0 - \tan 0 + \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\cos t\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\cos t\,dt$

ここで，$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\cos t\,dt = A$（定数）とすると，

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t - \tan t + A)\cos t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\cos t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{6}} A\cos t\,dt$$

$$= 2\Big[\,t\sin t + \cos t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \Big[\,\cos t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + A\Big[\,\sin t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}A$$

$\therefore\quad A = 3\sqrt{3} - 6 + \frac{\pi}{3}$

よって，$f(0) = \underline{\underline{3\sqrt{3} - 6 + \frac{\pi}{3}}}$

(3) (2)より $f(x) = 2x - \tan x + \left(3\sqrt{3} - 6 + \frac{\pi}{3}\right)$

$f'(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 x}$

$f'(x) = 0$ なる $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ を満たすたす x は $x = \frac{\pi}{4}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$)		↗	極大値	↘	

$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の最大値は　$\underline{\underline{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{6}\pi + 3\sqrt{3} - 7}}$

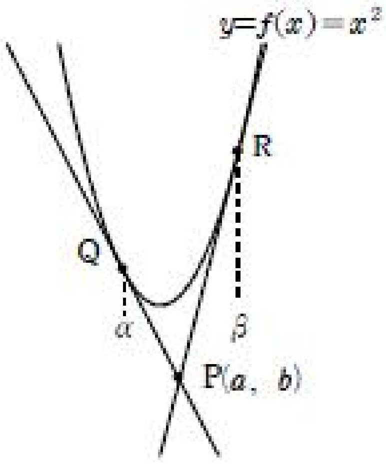
3

(1) $f(x)=x^2$

$f'(x)=2x$

接点を(t,t^2)とすると，

接線$l: y-t^2=2t(x-t) \iff y=2tx-t^2$



$\mathrm{P}(a,b)$を通るので

$b=2ta-t^2 \iff t^2-2at+b=0$ ……①

①の異なる２実数解がα,β．①の判別式をDとする．

$\frac{D}{4}=a^2-b>0$，$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=b$……②

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{pmatrix}\alpha-a\\ \alpha^2-b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta-a\\ \beta^2-b\end{pmatrix}=(\alpha-a)\cdot(\beta-a)+(\alpha^2-b)\cdot(\beta^2-b)$$
$$=\alpha\beta-a(\alpha+\beta)+a^2+\alpha^2\beta^2-b(\alpha^2+\beta^2)+b^2$$
$$=-(1+4b)a^2+b(1+4b) \quad (②より)$$
$$=\underline{\underline{(b-a^2)(1+4b)}}$$

(2) $\mathrm{P}(a,b)$を$(0,0)$に移動すると

$\mathrm{Q}(\alpha,\alpha^2) \to \mathrm{Q}'(\alpha-a,\alpha^2-b)$

$\mathrm{R}(\beta,\beta^2) \to \mathrm{R}'(\beta-a,\beta^2-b)$

$$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{OQ'R'}=\frac{1}{2}\left|(\alpha-a)(\beta^2-b)-(\alpha^2-b)(\beta-a)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\alpha\beta^2-b\alpha-a\beta^2+ab-\alpha^2\beta+a\alpha^2+b\beta-ab\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\alpha\beta(\beta-\alpha)+b(\beta-\alpha)+a(\alpha^2-\beta^2)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|b(\beta-\alpha)+b(\beta-\alpha)+2a^2(\alpha-\beta)\right|$$
$$=(a^2-b)(\beta-\alpha) \quad (②より) \text{ ……③}$$

②より

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{4a^2-4b}=2\sqrt{a^2-b}$$

ゆえに，③より△PQRの面積Sは

$$\underline{\underline{S=2(a^2-b)^{\frac{3}{2}}}}$$

(3) $\mathrm{P}(a,b)$がl上にあるので

$b=2a-3$

$$S=2(a^2-b)^{\frac{3}{2}}$$
$$=2(a^2-2a+3)^{\frac{3}{2}}$$
$$=2\{(a-1)^2+2\}^{\frac{3}{2}}$$
$$\geqq 4\sqrt{2}$$

したがって，最小値は

$\underline{\underline{4\sqrt{2}\ \left(\mathrm{P}(1,-1)のとき\right)}}$