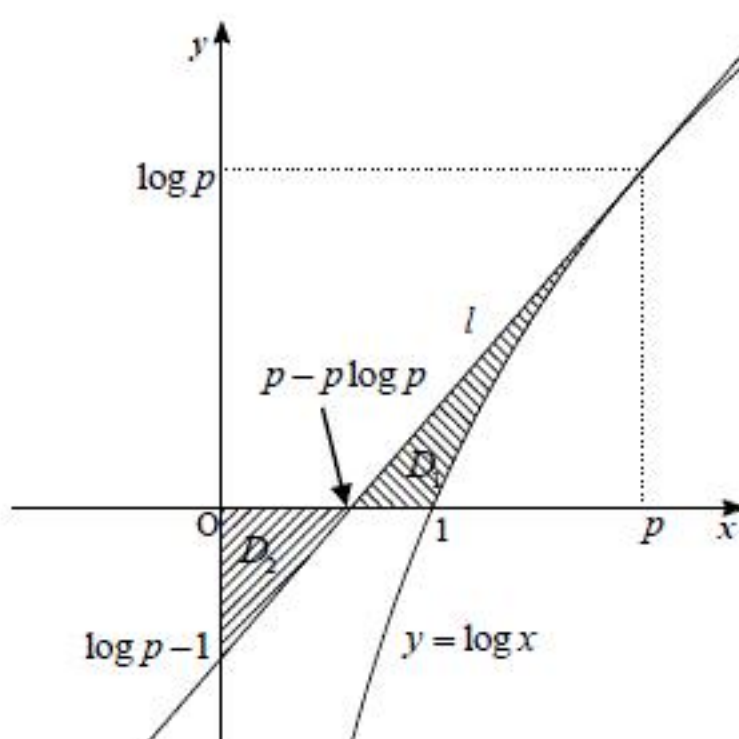


(1)



$$f(x) = \log x$$

とおくと,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

であるから,

$$a = f'(p) = \frac{1}{p}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{p}$$

(2)

直線 l は点 $P(p, \log p)$ を通ることから, (1) より,

$$\log p = \frac{1}{p} \cdot p + b$$

$$\therefore b = \log p - 1$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad b = \log p - 1$$

(3)

(1), (2) より, 直線 l の方程式は

$$y = \frac{1}{p}x + \log p - 1$$

である。 x 軸と直線 l の交点の x 座標は,

$$0 = \frac{1}{p}x + \log p - 1$$

$$\Leftrightarrow x = p - p \log p$$

であるから, D_1 の面積は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \{p - (p - p \log p)\} \cdot \log p - \int_1^p \log x dx &= \frac{p(\log p)^2}{2} - [x \log x - x]_1^p \\ &= \frac{p(\log p)^2}{2} - p \log p + p - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{p(\log p)^2}{2} - p \log p + p - 1$$

(4)

(2) より y 軸と直線 l の交点の y 座標は $\log p - 1$ であるから, $1 < p < e$ のとき $0 < \log p < 1$ より

$$\log p - 1 < 0$$

$$p - p \log p > 0$$

となることに注意すると, D_2 の面積は

$$\frac{1}{2}(p - p \log p) \cdot (1 - \log p) = \frac{p(\log p)^2}{2} - p \log p + \frac{p}{2}$$

となる。よって D_1 の面積と D_2 の面積が等しくなるのは,

$$\begin{aligned} \frac{p(\log p)^2}{2} - p \log p + p - 1 &= \frac{p(\log p)^2}{2} - p \log p + \frac{p}{2} \\ \Leftrightarrow p &= 2 \end{aligned}$$

のときである。

$$(\text{答}) \quad p = 2$$

(1)

$$h'(x) = 1 - \frac{n}{x}$$

であり、 $x \geq 2n$ のとき $\frac{n}{x} \leq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ であるから、

$$h'(x) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} h(x) - h(2n) &= \int_{2n}^x h'(t) dt \\ &\geq \int_{2n}^x \frac{dt}{2} \quad (\because (1)) \\ &= \left[\frac{t}{2} \right]_{2n}^x \\ &= \frac{1}{2}(x - 2n) \end{aligned}$$

より、題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} h(x) - h(2n) &\geq \frac{1}{2}(x - 2n) \\ \Leftrightarrow h(x) &\geq \frac{1}{2}(x - 2n) + h(2n) \\ &\geq \frac{1}{2}\{(2n - 2h(2n)) - 2n\} + h(2n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(4)

(3)より、 $x \geq 2n$ かつ $x \geq 2n - 2h(2n)$ のとき、

$$\begin{aligned} h(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow n \log x - x &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 < e^{n \log x - x} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{x^n}{e^x} &\leq 1 \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となる。したがって、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = 0$$

となり題意は示された。

(証明終)

(1)

$p+r=0 \Leftrightarrow r=-p$ および $q=0$ より,

$$\begin{aligned} a_n &= pn^3 - pn \\ &= pn(n^2 - 1) \\ &= p(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n-1, n, n+1$ は連続する3つの整数であるから、これらのうち1つは3の倍数であり、また少なくとも1つは2の倍数である。よって、 a_n は常に6の倍数である。

(証明終)

(2)

背理法を利用して題意を示す。すなわち、 q が3の倍数でなく、かつ $a_2 - 2a_1$ が6の倍数であると仮定して矛盾を導く。仮定より

$$\begin{aligned} a_2 - 2a_1 &= 8p + 4q + 2r - 2(p + q + r) \\ &= 6p + 2q \\ \Leftrightarrow 2q &= a_2 - 2a_1 - 6p \end{aligned}$$

であり、 $a_2 - 2a_1$ および $6p$ は6の倍数であることから上の式の右辺は6の倍数である。このとき、左辺も6の倍数となることから $2q$ は6の倍数であるが、これは q が3の倍数でないことに矛盾する。以上より、 q が3の倍数でないとき、 $a_2 - 2a_1$ が6の倍数でないことが示された。

(証明終)

(3)

数学的帰納法を利用して、 a_1 と a_2 がともに6の倍数であるときすべての自然数 n に対し

$$a_n \text{ は6の倍数} \quad \cdots \textcircled{1}$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

仮定より、 $\textcircled{1}$ は成立する。

[2] $n=k$ に対し $\textcircled{1}$ が成立するとき

このとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= p(k+1)^3 + q(k+1)^2 + r(k+1) - (pk^3 + qk^2 + rk) \\ &= 3p(k^2 + k) + 2qk + (p + q + r) \\ &= 3pk(k+1) + 2qk + a_1 \end{aligned}$$

である。ここで、 $k, k+1$ は連続する2つの整数であるから、これらのうち1つは2の倍数であり、 $3pk(k+1)$ は6の倍数である。また、仮定より a_1 は6の倍数である。ここで、(2) で示した命題の対偶をとると、

$$a_2 - 2a_1 \text{ が6の倍数ならば、} q \text{ が3の倍数}$$

となるが、仮定より a_1, a_2 が6の倍数であるから、 $a_2 - 2a_1$ も6の倍数である。よって q は3の倍数であり、 $2qk$ は6の倍数となる。以上より、 $a_{k+1} - a_k$ および a_k が6の倍数であるから、 a_{k+1} も6の倍数であり、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成立する。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n に対し $\textcircled{1}$ が成立することが示された。

(証明終)