$\boxed{1}$ $k>0,\ 8x^2-12kx+3k^2+8=0,\ \alpha=\sin\theta+2\cos\theta,\ \beta=2\sin\theta+\cos\theta$

(1) 解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}k=3\sin\theta+3\cos\theta\\ \alpha\beta=\dfrac{3}{8}k^2+1=2+5\sin\theta\cos\theta\end{cases}$$

$$\therefore\ \underline{\underline{\sin\theta+\cos\theta=\frac{k}{2},\ \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{40}k^2-\frac{1}{5}}}$$

(2)

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta \iff \frac{1}{4}k^2=\frac{3}{5}+\frac{3}{20}k^2 \iff k^2=6$$

$$\therefore\ \underline{\underline{k=\sqrt{6}}}$$

(3) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\sin\theta\cdot\cos\theta$ を 2 解とする方程式は，

$$t^2-\frac{\sqrt{6}}{2}t+\frac{1}{4}=0 \iff t=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より， $\sin\theta\leqq\cos\theta$ であるから，

$$\underline{\underline{\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}}$$

$\boxed{2}$

(1)

$$\left.\begin{array}{ll}\boxed{A\times5} & {}_7C_5={}_7C_2=21\\ \boxed{A\times6} & {}_7C_6={}_7C_1=7\\ \boxed{A\times7} & {}_7C_7=1\end{array}\right\}\qquad \underline{\underline{29\text{ 通り}}}$$

(2)

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AABB}\square\square\square\\ \square\mathrm{AABB}\square\square\\ \square\square\mathrm{AABB}\square\\ \square\square\square\mathrm{AABB}\end{array}\right\}\ 2^3\times4=\underline{\underline{32\text{ 通り}}}$$

(3)

(i) $\boxed{3\text{ 連続}}$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AAAB}\square\square\square\cdots\cdots8\\ \mathrm{BAAAB}\square\square\cdots\cdots4\\ \square\mathrm{BAAAB}\square\cdots\cdots4\\ \square\square\mathrm{BAAAB}\cdots\cdots4\\ \square\square\square\mathrm{BAAA}\cdots\cdots8\end{array}\right\}\ 28\text{ 通り}$$

ただし，AAABAAA は 2 回数えているので 27 通り

(ii) $\boxed{4\text{ 連続}}$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AAAAB}\square\square\cdots\cdots4\\ \mathrm{BAAAAB}\square\cdots\cdots2\\ \square\mathrm{BAAAAB}\cdots\cdots2\\ \square\square\mathrm{BAAAA}\cdots\cdots4\end{array}\right\}\ 12\text{ 通り}$$

(iii) $\boxed{5\text{ 連続}}$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AAAAAB}\square\cdots\cdots2\\ \mathrm{BAAAAAB}\cdots\cdots1\\ \square\mathrm{BAAAAA}\cdots\cdots2\end{array}\right\}\ 5\text{ 通り}$$

(iv) $\boxed{6\text{ 連続}}$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AAAAAAB}\cdots\cdots1\\ \mathrm{BAAAAAA}\cdots\cdots1\end{array}\right\}\ 2\text{ 通り}$$

(v) $\boxed{7\text{ 連続}}$

AAAAAAA……1 通り

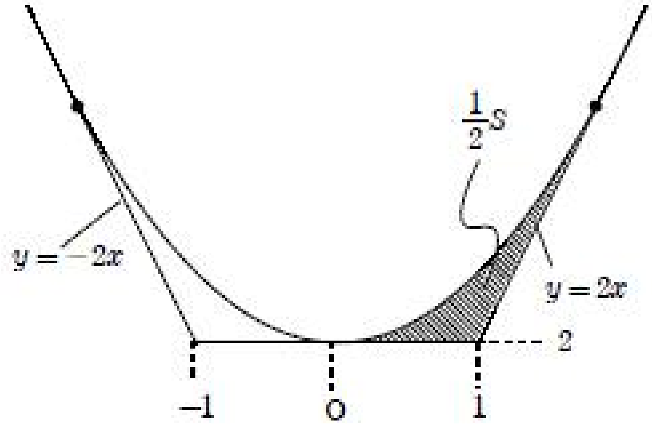
(i) ～ (v) より， $\underline{\underline{47\text{ 通り}}}$

$\boxed{3}$

$$f(x)=ax^2+b \quad (a>0)$$

$$g(x)=|x+1|+|x-1|$$

$$=\begin{cases} -2x & (x \leqq -1) \\ 2 & (-1<x \leqq 1) \\ 2x & (1<x) \end{cases}$$



(1)

$-2x=6$ あるいは $2x=6$

$\therefore\ \underline{\underline{x=\pm 3}}$

(2) $(0,2)$を通るので，

$a\cdot 0^2+b=2 \quad \therefore\ b=2$

$y=ax^2+2$ と $y=2x$ が接するので，連立して，

$ax^2+2=2x \iff ax^2-2x+2=0$

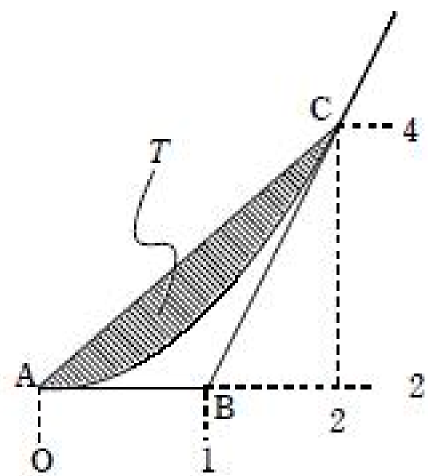
判別式を D とすると，

$D/4=1-2a=0 \quad \therefore\ a=\frac{1}{2} \quad \therefore\ \underline{\underline{f(x)=\frac{1}{2}x^2+2}}$

(3)

$$\frac{1}{2}S=\triangle\mathrm{ABC}-T=1-\frac{\frac{1}{2}}{6}(2-0)^3=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ \underline{\underline{S=\frac{2}{3}}}$



$\boxed{4}$ $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ ……①

(1)

$$a_3=2a_2+a_1=\underline{\underline{5}}\quad a_4=2a_3+a_2=\underline{\underline{12}}\quad a_5=2a_4+a_3=\underline{\underline{29}}$$

(2)

$$29x+12y=1 \iff 29(x-5)=-12(y+12)$$

$$\therefore \underline{\underline{\begin{cases} x=-12k+5 \\ y=29k-12 \end{cases} (k\text{ は整数})}}$$

(3)　$a_n,\ a_{n+1}$ が互いに素でないとする．

2 以上の整数 d を用いて，

$$a_{n+1}=db_{n+1},\ a_n=db_n\quad (b_{n+1},\ b_n\text{ は整数})$$

①より，

$$a_{n+1}=2a_n+a_{n-1} \iff db_{n+1}=2db_n+a_{n-1}$$

$$\iff a_{n-1}=d(b_{n+1}-2b_n)$$

$$\therefore a_{n-1}=db_{n-1}\quad (b_{n-1}\text{ は整数})$$

これをくりかえすと，$a_2=db_2,\ a_1=db_1\ (b_1,\ b_2\text{ は整数})$ となるが，

$a_1=1,\ a_2=2$ より，2 以上の d は存在しない．

よって，$\underline{\underline{a_n,\ a_{n+1}\text{ は互いに素}}}$．