

1

(1)

正の実数  $h$  と関数  $f(x) = x^4$  に対し、関数  $F(h) = \int_{1-h}^{1+h} f(x) dx$  は

$$F(h) = \int_{1-h}^{1+h} f(x) dx = \int_{1-h}^{1+h} x^4 dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_{1-h}^{1+h} = \frac{1}{5} \left\{ (1+h)^5 - (1-h)^5 \right\} = \frac{2}{5} h^5 + 4h^3 + 2h$$

と  $h$  の整式として表すことができる。

$$(\text{答}) \quad F(h) = \frac{2}{5} h^5 + 4h^3 + 2h$$

(2)

放物線  $y = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$  が 3 点  $(1-h, f(1-h))$ ,  $(1, f(1))$ ,  $(1+h, f(1+h))$  を通るための条件は

$$\begin{cases} f(1-h) = a(-h)^2 + b(-h) + c \\ f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ f(1+h) = ah^2 + bh + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-h)^4 = ah^2 - bh + c & \dots \textcircled{1} \\ 1 = c & \dots \textcircled{2} \\ (1+h)^4 = ah^2 + bh + c & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。したがって、②より、 $c$  の値は

$$c = 1$$

と求まる。また、①+③より、 $a$  は

$$\begin{aligned} (1-h)^4 + (1+h)^4 &= 2ah^2 + 2c \\ \Leftrightarrow a &= \frac{(1-4h+6h^2-4h^3+h^4) + (1+4h+6h^2+4h^3+h^4) - 2}{2h^2} \\ \therefore a &= h^2 + 6 \end{aligned}$$

と  $h$  の整式として表すことができ、①-③より、 $b$  は

$$\begin{aligned} (1-h)^4 - (1+h)^4 &= -2bh \\ \Leftrightarrow b &= \frac{(1-4h+6h^2-4h^3+h^4) - (1+4h+6h^2+4h^3+h^4)}{-2h} \\ \therefore b &= 4h^2 + 4 \end{aligned}$$

と  $h$  の整式として表すことができる。

$$(\text{答}) \quad c = 1, a = h^2 + 6, b = 4h^2 + 4$$

(3)

(2)の結果より、関数  $G(h) = \int_{1-h}^{1+h} \{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} dx$  は

$$\begin{aligned} G(h) &= \int_{1-h}^{1+h} \{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} dx \\ &= \left[ \frac{a}{3} (x-1)^3 + \frac{b}{2} (x-1)^2 + c(x-1) \right]_{1-h}^{1+h} \\ &= \left( \frac{a}{3} h^3 + \frac{b}{2} h^2 + ch \right) - \left\{ \frac{a}{3} (-h)^3 + \frac{b}{2} (-h)^2 + c(-h) \right\} \\ &= \frac{2}{3} ah^3 + 2ch \\ &= \frac{2}{3} (h^2 + 6)h^3 + 2h \\ &= \frac{2}{3} h^5 + 4h^3 + 2h \end{aligned}$$

と  $h$  の整式として表すことができる。

$$(\text{答}) \quad G(h) = \frac{2}{3} h^5 + 4h^3 + 2h$$

(4)

(1), (3)の結果より、 $\frac{F(h)-G(h)}{h^5}$  は

$$\begin{aligned} \frac{F(h)-G(h)}{h^5} &= \frac{\left( \frac{2}{5} h^5 + 4h^3 + 2h \right) - \left( \frac{2}{3} h^5 + 4h^3 + 2h \right)}{h^5} \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{4}{15} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{F(h)-G(h)}{h^5} = -\frac{4}{15}$$

(1)

直線  $l, m$  の方向ベクトルの1つを、それぞれ  $\vec{d}_l, \vec{d}_m$  とおくと

$$\begin{cases} \vec{d}_l = \overrightarrow{AB} = (4, 4, -2) \\ \vec{d}_m = \overrightarrow{CD} = (2, -1, 2) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで、2つのベクトルの内積を計算すると

$$\vec{d}_l \cdot \vec{d}_m = 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となるから、直線  $l$  と  $m$  は垂直であることがわかる。

(証明終)

(2)

点  $P, Q$  の位置ベクトルをそれぞれ  $\vec{p}, \vec{q}$  とおくと、これらはそれぞれ直線  $l, m$  上の点であるから、実数  $s, t$  を用いて

$$\begin{cases} \vec{p} = \overrightarrow{OA} + s\vec{d}_l \\ \vec{q} = \overrightarrow{OC} + t\vec{d}_m \end{cases}$$

と表せる。このとき、 $\overrightarrow{PQ}$  は

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - s\vec{d}_l + t\vec{d}_m = \overrightarrow{AC} - s\vec{d}_l + t\vec{d}_m$$

と表すことができ、これが  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  の両方に垂直であるという条件から、実数  $s, t$  の値は

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AC} - s\vec{d}_l + t\vec{d}_m) \cdot \vec{d}_l = 0 \\ (\overrightarrow{AC} - s\vec{d}_l + t\vec{d}_m) \cdot \vec{d}_m = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d}_l = s|\vec{d}_l|^2 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d}_m = -t|\vec{d}_m|^2 \end{cases} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = s\{4^2 + 4^2 + (-2)^2\} \\ 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = -t\{2^2 + (-1)^2 + 2^2\} \end{cases} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &\Leftrightarrow (s, t) = \left(\frac{1}{2}, -1\right) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、点  $P, Q$  の座標は、①, ③より

$$P(-1, 2, 1), Q(-2, 4, 3)$$

であることがわかる。

(答)  $P(-1, 2, 1), Q(-2, 4, 3)$ 

(3)

3つの線分  $KL, LM, MN$  は同じ立方体  $W$  の3つの辺であるとする。このとき、立方体  $W$  は12本の辺をもち、それらは互いに平行で共有点を持たない4本ずつの辺の3つのグループからなる。それぞれのグループについて集合  $X, Y, Z$  とおき、 $KL \in X$  とすると

$KL, LM$  は共有点  $L$  をもつから、 $LM \notin X$  である

ことがわかる。ここで、 $LM \in Y$  とすると

$LM, MN$  は共有点  $M$  をもつから、 $MN \notin Y$  である

ことがわかるため、 $MN \in X$  または  $MN \in Z$  となる。次に、 $MN \in X$  と仮定すると

$KL, MN \in X$  より、 $KL$  と  $MN$  は平行である

ことになるが、これは  $\overrightarrow{LK} \parallel \overrightarrow{AB} (= \vec{d}_l)$  かつ  $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{CD} (= \vec{d}_m)$  という条件から、 $\vec{d}_l \parallel \vec{d}_m$  となり①

の結果に矛盾する。よって、 $MN \in Z$  であることがわかるため、以上の結果をまとめると

$$KL \in X, LM \in Y, MN \in Z$$

となる。したがって、 $\overrightarrow{LM}$  は  $\overrightarrow{LK}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  に垂直であることがわかり、 $\overrightarrow{LK} \parallel \overrightarrow{AB} (= \vec{d}_l)$  かつ

$\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{CD} (= \vec{d}_m)$  であることから、(2)の結果を用いて  $L=P$ ,  $M=Q$  であることがわかる。

さらに、(2)の結果より、線分  $PQ$  の長さは

$$PQ = \sqrt{\{-1 - (-2)\}^2 + (2 - 4)^2 + (1 - 3)^2} = 3$$

であるから、立方体  $W$  の各辺の長さについて  $KL = LM(PQ) = MN = 3$  となる。ここで、 $\overrightarrow{LK}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  は同じ向きに平行であり、 $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  は同じ向きに平行であるという条件から、点  $K, N$  の座標は、それぞれ

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{LK} = |\overrightarrow{LK}| \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \\ \overrightarrow{MN} = |\overrightarrow{MN}| \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OL} + \frac{|\overrightarrow{LK}|}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{CD}|} \overrightarrow{CD} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OK} = (-1, 2, 1) + \frac{3}{6}(4, 4, -2) \\ \overrightarrow{ON} = (-2, 4, 3) + \frac{3}{3}(2, -1, 2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore K(1, 4, 0), N(0, 3, 5)$$

であることがわかる。したがって、線分  $KN$  の中点の座標は  $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$  と求まる。

(答)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(1)

$a_1 = 0, b_1 = 1$ より、関数  $f_1(x)$  は

$$f_1(x) = \frac{0 \cdot x - 1}{(2^{1+1} - 2)x - (2^{1+1} - 1)} = \frac{-1}{2x - 3}$$

である。次に、与えられた漸化式  $f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x))$  を用いることで、関数  $f_2(x)$  は

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = \frac{-1}{2 \cdot \frac{-1}{2x-3} - 3} = \frac{-(2x-3)}{-2-3(2x-3)} = \frac{2x-3}{6x-7} = \frac{2x-3}{(2^{2+1}-2)x - (2^{2+1}-1)}$$

であることがわかる。また、 $f_2(x) = \frac{a_2x - b_2}{(2^{n+1}-2)x - (2^{n+1}-1)}$  より、 $a_2 = 2, b_2 = 3$  である。

$$(\text{答}) \quad f_2(x) = \frac{2x-3}{6x-7}, a_2 = 2, b_2 = 3$$

(2)

$t = f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = \dots$  を満たすには、 $t = f_1(t)$  を満たすことが必要である。また、逆に  $t = f_1(t)$  を満たすとき、与えられた漸化式を用いることで、すべての自然数  $n$  に対して

$$f_{n+1}(t) = f_n(f_1(t)) = f_n(t)$$

が成り立つから、帰納的に

$$t = f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = \dots$$

となり、十分である。したがって、 $t = f_1(t)$  を満たす実数  $t$  をすべて求めればよいことがわかる。ここで

$$t = f_1(t) \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2t-3}$$

$$\Leftrightarrow t(2t-3) = -1 \quad \text{かつ} \quad t \neq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1) = 0 \quad \text{かつ} \quad t \neq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, 1$$

となるから、条件を満たす実数  $t$  の値は  $t = \frac{1}{2}, 1$  であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{2}, 1$$

(3)

(2)の結果より、すべての自然数  $n$  に対して

$$\begin{cases} f_n(1) = 1 \\ f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_n \cdot 1 - b_n}{(2^{n+1} - 2) \cdot 1 - (2^{n+1} - 1)} = 1 \\ \frac{a_n \cdot \frac{1}{2} - b_n}{(2^{n+1} - 2) \cdot \frac{1}{2} - (2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n - b_n = -1 \\ \frac{1}{2}a_n - b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_n - b_n) - \left(\frac{1}{2}a_n - b_n\right) = -1 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 2^n\right) \\ (a_n - b_n) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}a_n - b_n\right) = -1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2^n\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 2^n - 2 \\ b_n = 2^n - 1 \end{cases}$$

となる。したがって、数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  の一般項は、それぞれ  $a_n = 2^n - 2, b_n = 2^n - 1$  である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^n - 2, b_n = 2^n - 1$$