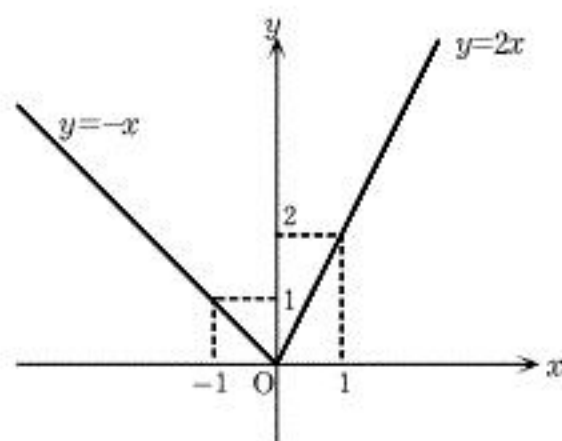


1

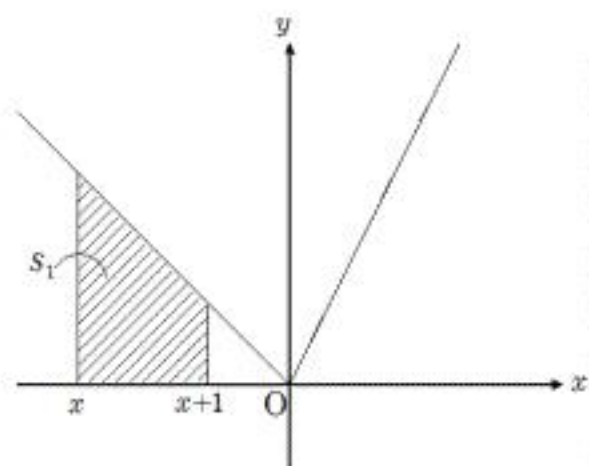
(1)



$y=f(x)$ のグラフは左図実線部.

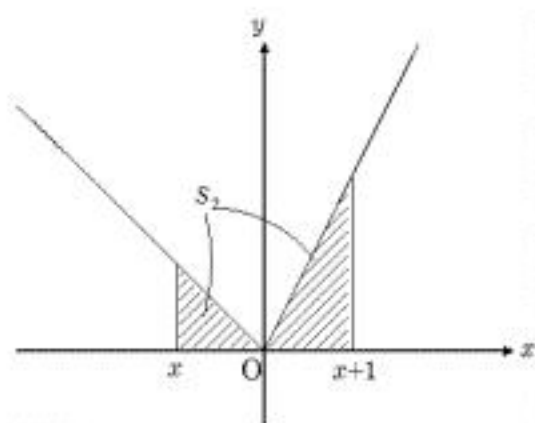
(2) (i) $x < -1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} f(x) dx &= S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot ((-x) + (-x-1)) \\ &= -x - \frac{1}{2} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$



(ii) $-1 \leq x < 0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} f(x) dx &= S_2 = \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{2}(x+1)(2x+2) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

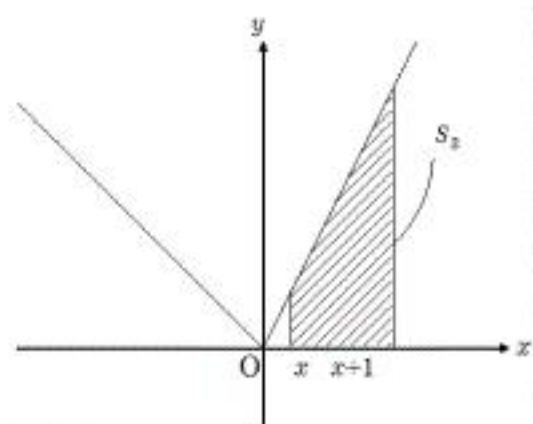


(iii) $0 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} f(x) dx &= S_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot ((2x) + (2x+2)) \\ &= 2x + 1 \quad \dots\dots ③\end{aligned}$$

よって,

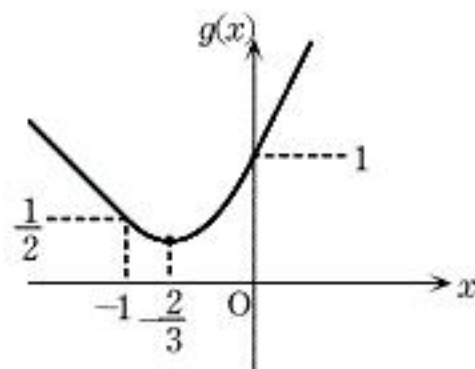
$$g(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2} & (x < -1 \text{ のとき}) \\ \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 & (-1 \leq x < 0 \text{ のとき}) \\ 2x + 1 & (0 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$



(3) ①~③より, $g(x) = \int_x^{x+1} f(x) dx$ のグラフは右図.

よって, $g(x)$ が最小になるのは $x = -\frac{2}{3}$ のとき

$$\min g(x) = g\left(-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$



- (1) 有理数 r は $r = \frac{q}{p}$ (p は自然数, q は整数, p, q は互いに素) をみたすとする.

$$f\left(\frac{q}{p}\right) = 0 \iff \frac{q^3}{p^3} + a \cdot \frac{q^2}{p^2} + b \cdot \frac{q}{p} + c = 0$$

両辺に p^3 をかけて,

$$q^3 + apq^2 + bp^2q + cp^3 = 0 \iff q^3 = -p(aq^2 + bpq + cp^2)$$

p, q は互いに素なので, p と q^3 も互いに素となる. q^3 が p を因数にもつので,

$$p = 1$$

よって,

$$r = \frac{q}{1} = q : (\text{整数}) \quad \blacksquare$$

- (2) (1)より, 「 $f(x) = 0$ が整数解をもたないこと」を示せば十分.

「 $f(1), f(2), f(3)$ がいずれも 3 で割り切れない」

$$\iff \begin{cases} f(1) = 1 + a + b + c \not\equiv 0 \pmod{3} & \dots\dots ① \\ f(2) = 8 + 4a + 2b + c \equiv 2 + a + 2b + c \not\equiv 0 \pmod{3} & \dots\dots ② \\ f(3) = 27 + 9a + 3b + c \equiv c \not\equiv 0 \pmod{3} & \dots\dots ③ \end{cases}$$

$f(x) = 0$ が整数解 n をもつとすると, $f(n) = 0$ となるが,

- ・ $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c \equiv c \not\equiv 0 \pmod{3}$ ($\because$ ③)
- ・ $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c \equiv 1 + a + b + c \not\equiv 0 \pmod{3}$ ($\because$ ①)
- ・ $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c \equiv 2 + a + 2b + c \not\equiv 0 \pmod{3}$ ($\because$ ②)

以上より, $f(n)$ は 3 で割り切れないので, $f(n) = 0$ にはならない.

したがって, $f(x) = 0$ は整数解をもたない.

よって, $f(x) = 0$ は有理数の解をもたない. $\blacksquare$

(1) $\alpha = a + bi, \beta = a - bi$ とする.

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x) + px + q \quad (p, q: \text{整数}) \cdots \cdots ①$$

とおくと, $g(\alpha) = 0$ より,

$$g(\alpha) = p\alpha + q = p(a + bi) + q = (ap + q) + bpi \iff \begin{cases} ap + q = 0 \\ bp = 0 \end{cases} \cdots \cdots ②$$

$x = \beta$ とすると,

$$\begin{aligned} g(\beta) &= p\beta + q = p(a - bi) + q \\ &= (ap + q) - bpi \\ &= 0 \quad (\because ②) \end{aligned}$$

よって,

$$g(a - bi) = 0 \quad \blacksquare$$

(2)

$$\begin{aligned} (x - \alpha)(x - \beta) &= (x - (a + bi))(x - (a - bi)) \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \end{aligned}$$

(1)より, $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ より, $p = q = 0$ となるから,

$$① \iff g(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)Q(x)$$

よって, $g(x)$ は $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ で割り切れる. $\blacksquare$

(3) 3次方程式の解と係数の関係より, 残りの1つの解を γ とすると,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2a + \gamma = 5 & \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a^2 + b^2 + 2a\gamma = m & \cdots \cdots ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = (a^2 + b^2)\gamma = 13 & \cdots \cdots ⑤ \end{cases}$$

③, ⑤より,

$$(a^2 + b^2)(5 - 2a) = 13$$

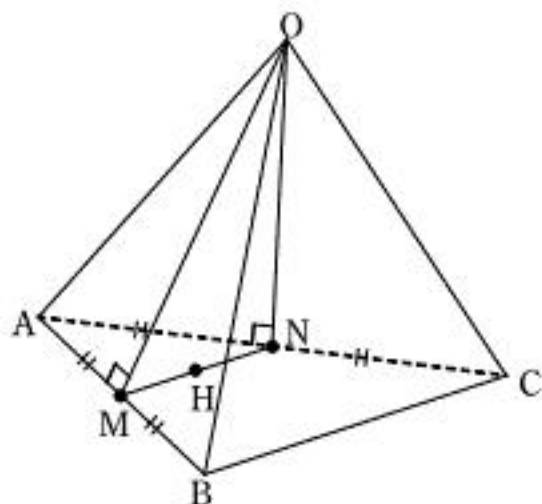
a, b は整数であるから,

$$(a, b) = (2, 3), (2, -3)$$

$$\therefore \gamma = 1$$

よって, ④より,

$$m = \underline{17}$$



(1) 線分 MN の中点を H とする. 各面は辺の長さが 1 の正三角形なので,

$$OM = ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

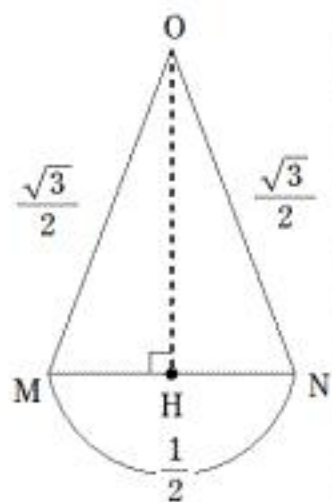
中点連結定理より,

$$MN = \frac{1}{2}$$

右図より, $\triangle OMH$ で三平方の定理を用いて,

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OM^2 - MH^2} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{16}$$



(2) 対称性より, 点 P は平面 AHO 上の点である.

右図において, $\triangle AHO$ に余弦定理を用いると,

$$\cos \theta = \frac{1^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{11}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\frac{2}{11}}$$

よって,

$$AP = OA \sin \theta = \sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$V_{OAMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle OMN} \cdot AP = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{16} \cdot \sqrt{\frac{2}{11}} = \frac{\sqrt{2}}{48}$$

