

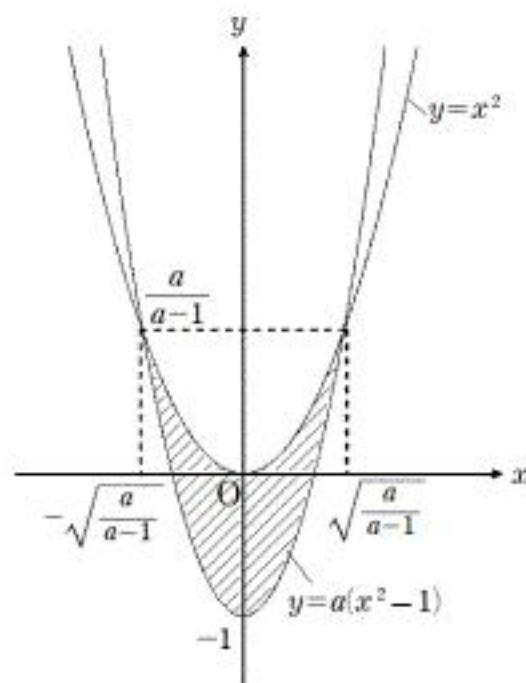
(1) $C_1: y = x^2$ と $C_2: y = a(x-1)^2$ から y を消去して,

$$x^2 = a(x^2 - 1)$$

$$\iff (a-1)x^2 = a$$

$$\iff x^2 = \frac{a}{a-1} \quad \therefore x = \pm \sqrt{\frac{a}{a-1}}$$

$$\therefore \text{交点は} \left(-\sqrt{\frac{a}{a-1}}, \frac{a}{a-1} \right), \left(\sqrt{\frac{a}{a-1}}, \frac{a}{a-1} \right)$$



(2) 求める面積は右図斜線部.

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-\sqrt{\frac{a}{a-1}}}^{\sqrt{\frac{a}{a-1}}} \{x^2 - a(x^2 - 1)\} dx = \frac{a-1}{6} \left\{ \sqrt{\frac{a}{a-1}} - \left(-\sqrt{\frac{a}{a-1}} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{4a\sqrt{a}}{3\sqrt{a-1}} \end{aligned}$$

(3) $S(a) = \frac{4}{3} \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$ より,

$$\frac{d}{da} S(a) = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} \cdot (a-1)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} (a-1)^{-\frac{1}{2}}}{a-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{a}(2a-3)}{(a-1)\sqrt{a-1}}$$

a	(1)	...	$\frac{3}{2}$	...
$\frac{d}{da} S(a)$		-	0	+
$S(a)$		$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$

よって, 増減表より, $S(a)$ が最小となるのは $\underline{a = \frac{3}{2}}$ のとき.

$$\min S(a) = S\left(\frac{3}{2}\right) = \underline{2\sqrt{3}}$$

$$\boxed{2} \quad a_{n+1} = \begin{cases} -a_n & (a_n < 0 \text{ のとき}) \\ a_n - 1 & (a_n \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \dots\dots(*)$$

(1) (*)に代入して,

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\therefore \underline{a_7 = \frac{1}{4}}$$

(2) (*)に代入して,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
a_n	4	3	2	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	...

($n \geq 5$ では, $0, -1, 1$ を繰り返す.)

$$\sum_{i=1}^{40} a_i = \{4 + 3 + 2 + 1 + 0 + (-1) + 1\} \times 12 = \underline{10}$$

(3) (i) $a_1 = 0$ であるとき, (*)に代入して,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	...

($0, -1, 1$ を繰り返す.)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{22} a_i &= \{0 + (-1) + 1\} \times 7 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって, $\sum_{i=1}^{22} a_i = 0$ をみたす.

(ii) $a_1 = 1$ であるとき, (*)に代入して,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	...

($1, 0, -1$ を繰り返す.)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{22} a_i &= \{1 + 0 + (-1)\} \times 7 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

これは, $\sum_{i=1}^{22} a_i = 0$ をみたさない.

(iii) $0 < a_1 < 1$ であるとき, (*)に代入して,

$a_1 = p$ とすると, $p - 1 < 0, 1 - p > 0, -p < 0$ であるから, (*)に代入して,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	p	$p-1$	$1-p$	$-p$	p	$p-1$	$1-p$	$-p$	p	...

($p, p-1, 1-p, -p$ を繰り返す.)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{22} a_i &= \{p + (p-1) + (1-p) + (-p)\} \times 5 + p + (p-1) \\ &= 2p - 1 \end{aligned}$$

よって, $\sum_{i=1}^{22} a_i = 2p - 1 = 0$ のとき

$$a_1 = p = \frac{1}{2}$$

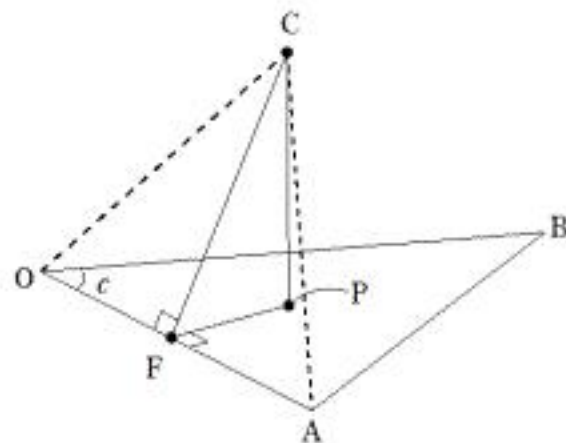
(i)~(iii)より, $0 \leq a_1 \leq 1$ であり, かつ $\sum_{i=1}^{22} a_i = 0$ をみたすような a_1 は, $a_1 = 0, \frac{1}{2}$ である.

- (1) CP は平面 OAB に垂直なので, $CP \perp OA$

条件より, $PF \perp OA$

$$\begin{cases} CP \perp OA \\ PF \perp OA \end{cases} \text{より, 平面 } CPF \perp OA$$

よって, $CF \perp OA$ ■



- (2) 右上図において, $\angle COA = b$, $OC = 1$ より,

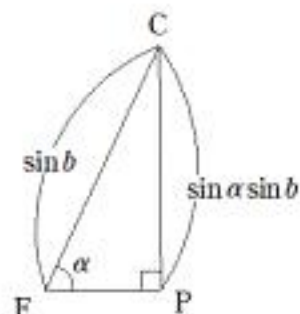
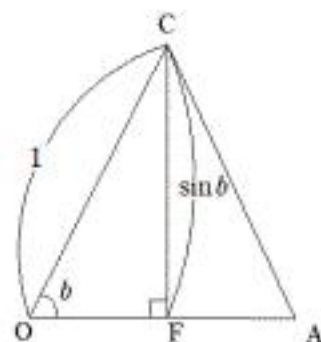
$$CF = OC \sin b = \sin b$$

条件より, 平面 OAC と平面 OAB のなす角は α なので, $\angle CFP = \alpha$

$$CP = CF \sin \alpha = \sin \alpha \sin b$$

四面体 OABC の体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{OAB} \cdot CP = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin c \cdot \sin \alpha \sin b \\ &= \frac{1}{6} \sin \alpha \sin b \sin c \end{aligned}$$



- (3) (1)(2)と同様に A から平面 OBC への垂線, B から平面 OAC への垂線を考えると,

$$V = \frac{1}{6} \sin \alpha \sin b \sin c = \frac{1}{6} \sin \beta \sin c \sin a = \frac{1}{6} \sin \gamma \sin a \sin b$$

各辺を $\frac{1}{6} \sin a \sin b \sin c (\neq 0)$ で割ると,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad \blacksquare$$