

1

(1)

$x = \tan \theta$ とおくと、 $dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ となり、積分区間は次のようになる。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

よって、

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{4}$

(2)

k が 0 以上の整数であるとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} &= \frac{1 - (-x^2)^{k+1}}{1 - (-x^2)} \\ &= \frac{1 - (-1)^{k+1} \cdot x^{2k+2}}{1 + x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k+2}}{1+x^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} &= \frac{1}{1+x^2} - \left\{ \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k+2}}{1+x^2} \right\} \\ &= (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k+2}}{1+x^2} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} \right| &= \left| (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k+2}}{1+x^2} \right| \\ &= \frac{x^{2k+2}}{1+x^2} \\ &\leq x^{2k+2} \end{aligned}$$

となるので

$$-x^{2k+2} \leq \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} \leq x^{2k+2}$$

である。

(証明終)

(3)

(2)より、 $-x^{2k+2} \leq \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} \leq x^{2k+2}$ であるから

$$\int_0^1 -x^{2k+2} dx \leq \int_0^1 \left\{ \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} \right\} dx \leq \int_0^1 x^{2k+2} dx \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

$$\int_0^1 x^{2k+2} dx = \left[\frac{x^{2k+3}}{2k+3} \right]_0^1 = \frac{1}{2k+3}$$

であり、

$$\int_0^1 -x^{2k+2} dx = -\int_0^1 x^{2k+2} dx = -\frac{1}{2k+3}$$

である。また、(1)と $\int_0^1 \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ であることから

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} \right\} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^1 \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \end{aligned}$$

である。よって、 $\textcircled{1}$ は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2k+3} &\leq \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \leq \frac{1}{2k+3} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2k+3} &\leq \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2k+3} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2k+3} \right) &= \frac{\pi}{4} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2k+3} \right) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

であるから、はさみうちの原理により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{4}$

(1)

 $\overrightarrow{OA} = (0, a), \overrightarrow{OB} = (b, 0)$ より,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b, -a)$$

となる。また、 $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$ より、 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ となるから、実数 k を用いて、 $\overrightarrow{BC} = (ka, kb)$ と表せる。また、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}| &= |\overrightarrow{AB}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow k^2(a^2 + b^2) &= a^2 + b^2 \\ \therefore k &= \pm 1 \quad (\because a^2 + b^2 \neq 0) \end{aligned}$$

より、 $\overrightarrow{BC} = (a, b), (-a, -b)$ となる。

[1] $\overrightarrow{BC} = (a, b)$ のとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \\ &= (a+b, b) \\ \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \\ &= (a, a+b) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$a \geq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ かつ } (a, b) \neq (0, 0) \Rightarrow a > 0 \text{ または } b > 0$$

であり、 $a > 0$ のとき、 $a > 0, a+b > 0$ となるため、点 D は第 1 象限にあり、 $b > 0$ のとき、 $a+b > 0, b > 0$ となるため、点 C は第 1 象限にある。したがって、点 C または点 D は第 1 象限にあるため、このとき条件を満たす。

[2] $\overrightarrow{BC} = (-a, -b)$ のとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \\ &= (-a+b, -b) \\ \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \\ &= (-a, a-b) \end{aligned}$$

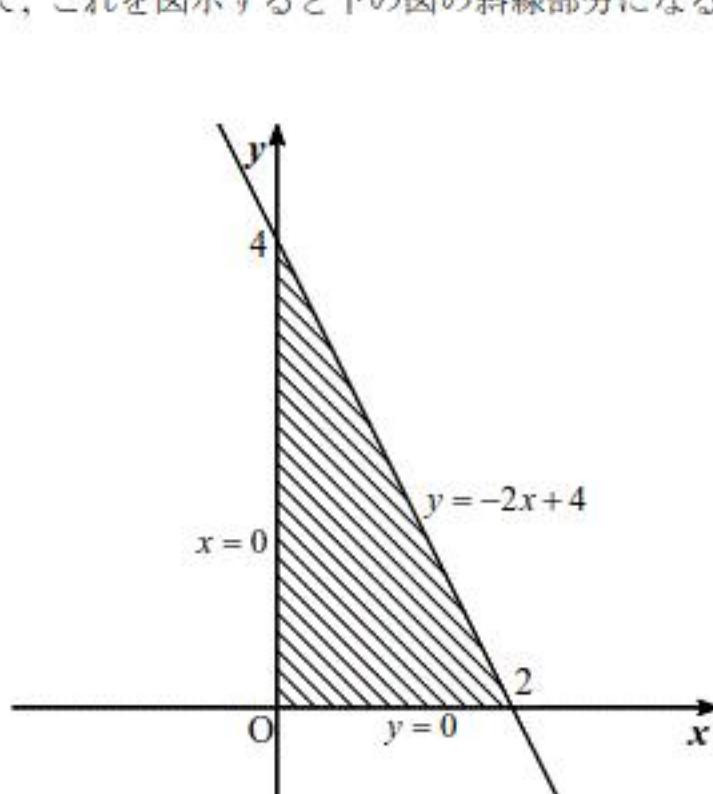
となる。よって、 $-a \leq 0$ より点 D は第 1 象限になく、 $-b \leq 0$ より点 C は第 1 象限にない。これは点 C または点 D は第 1 象限にあることと矛盾するため、このとき条件を満たさない。

以上[1],[2]より、点 C の座標は $(a+b, b)$ であり、点 D の座標は $(a, a+b)$ である。

また、

$$0 \leq x \text{ かつ } 0 \leq y \text{ かつ } y \leq -2x+4$$

となる領域を F として、これを図示すると下の図の斜線部分になる。ただし、境界を含む。



よって、 $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ より、4 点 A, B, C, D の座標 (x, y) が全て $0 \leq x$ かつ $0 \leq y$ を満たすことは明らかであり、このことに注意すると、

正方形 ABCD の周および内部が領域 F に含まれる

$$\Leftrightarrow 4 \text{ 点 A, B, C, D が領域 } F \text{ に含まれる}$$

$$\Leftrightarrow 4 \text{ 点 A, B, C, D の座標 } (x, y) \text{ が全て } y \leq -2x+4 \text{ を満たす}$$

$$\Leftrightarrow a \leq -2 \cdot 0 + 4 \text{ かつ } 0 \leq -2b+4 \text{ かつ } b \leq -2(a+b)+4 \text{ かつ } a+b \leq -2a+4$$

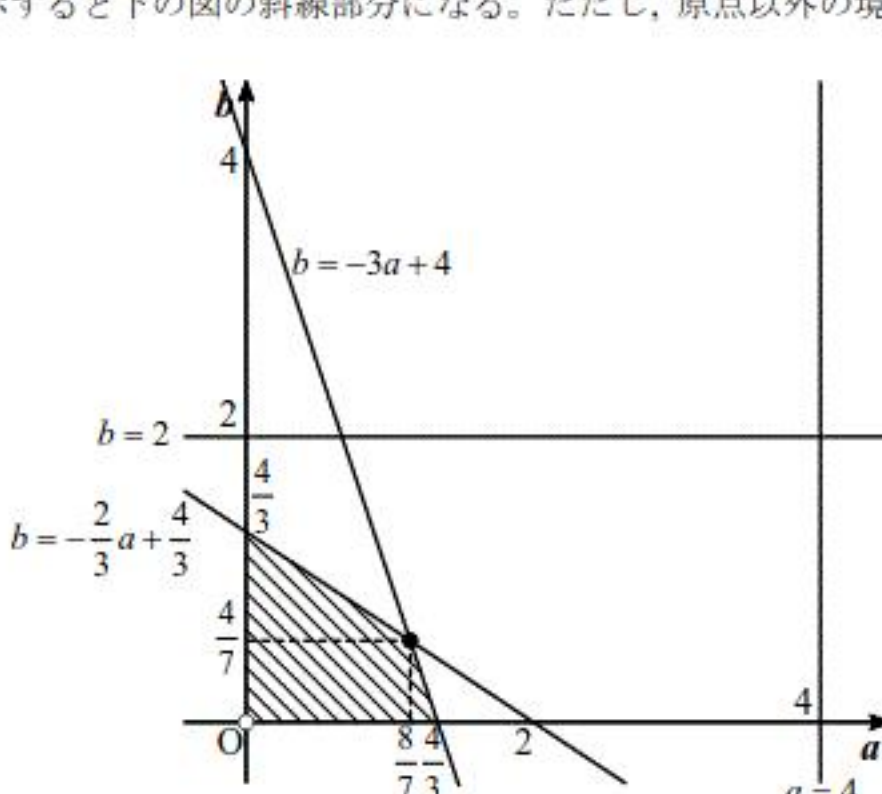
$$\Leftrightarrow a \leq 4 \text{ かつ } b \leq 2 \text{ かつ } b \leq -\frac{2}{3}a + \frac{4}{3} \text{ かつ } b \leq -3a+4$$

となる。直線 $b = -\frac{2}{3}a + \frac{4}{3}$ と直線 $b = -3a+4$ の交点の座標は、

$$(a, b) = \left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7} \right)$$

となることに注意して、これと $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ かつ $(a, b) \neq (0, 0)$ を満たす領域 G として、

これを図示すると下の図の斜線部分になる。ただし、原点以外の境界を全て含む。



(答) 点 C の座標: $(a+b, b)$

点 D の座標: $(a, a+b)$

前図

(2)

$$S = |\overrightarrow{AB}|^2 = a^2 + b^2$$

より、(1)で求めた領域 G にある点 (a, b) のうち、 $a^2 + b^2$ を最大にするものを考えればよい。

$a^2 + b^2$ は原点と点 (a, b) の距離の 2 乗だから、

$$(a, b) = \left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7} \right) \text{ のとき } a^2 + b^2 = \frac{80}{49}$$

$$(a, b) = \left(0, \frac{4}{3} \right) \text{ のとき } a^2 + b^2 = \frac{16}{9} \left(> \frac{80}{49} \right)$$

$$(a, b) = \left(\frac{4}{3}, 0 \right) \text{ のとき } a^2 + b^2 = \frac{16}{9}$$

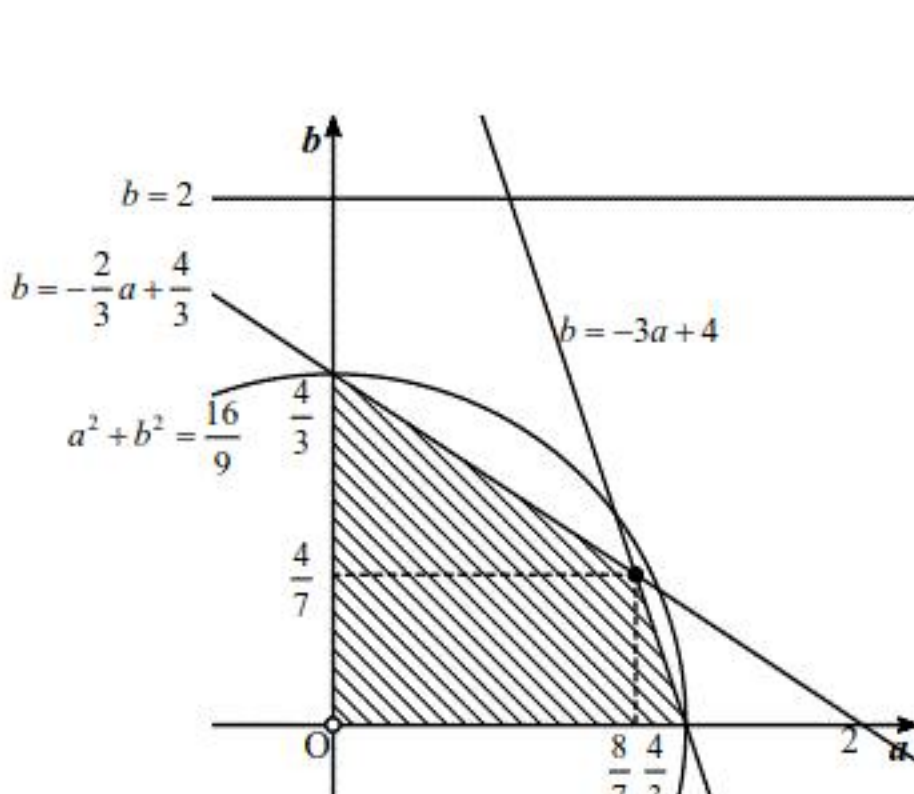
となることに注意すると下の図のようになる。したがって、 S が最大になるのは

$$(a, b) = \left(0, \frac{4}{3} \right), \left(\frac{4}{3}, 0 \right)$$

のときであり、このとき最大値

$$S = \frac{16}{9}$$

をとる。



(答) $(a, b) = \left(0, \frac{4}{3} \right), \left(\frac{4}{3}, 0 \right)$ のとき、 $S = \frac{16}{9}$

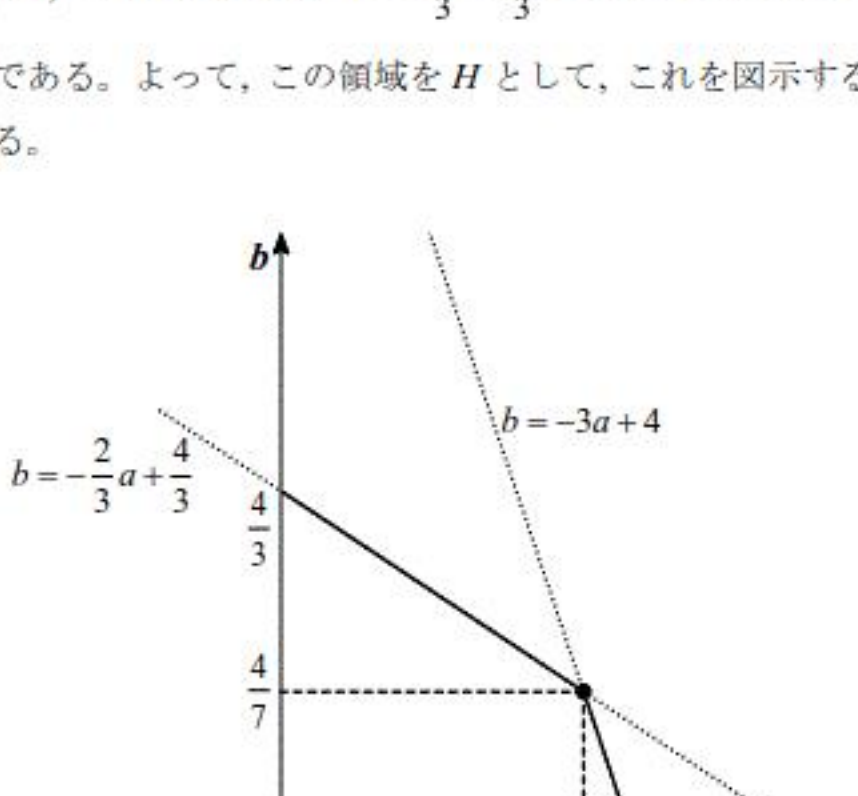
(3)

点 (a, b) が領域 G を動き、点 C または点 D の少なくとも一方が直線 $y = -2x + 4$ の上を動く

ことと、

点 (a, b) が領域 G を動き、 $b = -\frac{2}{3}a + \frac{4}{3}$ または $b = -3a + 4$ となる

ことは同値である。よって、この領域を H として、これを図示すると下の図の端点を含む実線部分になる。

[1] 点 C が直線 $y = -2x + 4$ の上を動くとき

このとき

$$b = -\frac{2}{3}a + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2a + 3b - 4 = 0$$

となる。 $a^2 + b^2$ は原点と点 (a, b) の距離の 2 乗だから、点と直線の距離の公式より、

$$a^2 + b^2 \geq \left(\frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \right)^2 = \frac{16}{13}$$

となる。等号が成立するのは、 $a^2 + b^2$ が原点と直線 $2a + 3b - 4 = 0$ の距離の 2 乗となるときであり、このとき (a, b) は原点から直線 $2a + 3b - 4 = 0$ に下した垂線の足となる。直線

$2a + 3b - 4 = 0$ の傾きは $-\frac{2}{3}$ であるから、

$$\begin{cases} 2a + 3b - 4 = 0 \\ b = \frac{3}{2}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{13} \\ b = \frac{12}{13} \end{cases}$$

より、 $(a, b) = \left(\frac{8}{13}, \frac{12}{13} \right)$ となる。このとき $0 < a < \frac{8}{7}$ を満たすから、この点は確かに領域 H

上に存在する。

[2] 点 D が直線 $y = -2x + 4$ の上を動くとき

このとき

$$b = -3a + 4 \Leftrightarrow 3a + b - 4 = 0$$

となる。 $a^2 + b^2$ は原点と点 (a, b) の距離の 2 乗だから、点と直線の距離の公式より、

$$a^2 + b^2 \geq \left(\frac{|3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \right)^2 = \frac{16}{10} \left(> \frac{16}{13} \right)$$

となる。よって、[1]より、このとき $a^2 + b^2$ は最小になり得ない。

以上[1],[2]より、

$$(a, b) = \left(\frac{8}{13}, \frac{12}{13} \right)$$

のとき最小値

$$S = \frac{16}{13}$$

をとる。

(答) $(a, b) = \left(\frac{8}{13}, \frac{12}{13} \right)$ のとき、 $S = \frac{16}{13}$

(1)

$r = p - fq$ より、 p と q が d の倍数ならば r も d の倍数である。よって、

$$d \text{ が } p \text{ と } q \text{ の公約数} \Rightarrow d \text{ が } q \text{ と } r \text{ の公約数}$$

は成り立つ。また、 $p = fq + r$ より、 q と r が d の倍数ならば p も d の倍数である。よって、

$$d \text{ が } q \text{ と } r \text{ の公約数} \Rightarrow d \text{ が } p \text{ と } q \text{ の公約数}$$

も成り立つ。したがって、 d が p と q の公約数であることと、 d が q と r の公約数であることは同値である。

(証明終)

(2)

$$\gcd(p, q) = \gcd(r_j, r_{j+1}) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、 j に関する数学的帰納法で示す。

[1] $j=1$ のとき

$p = r_1, q = r_2$ より、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $j=k$ のとき

$$\gcd(p, q) = \gcd(r_k, r_{k+1})$$

が成り立つことを仮定すると

$$r_k = f_k r_{k+1} + r_{k+2}$$

となる。(1) から r_k と r_{k+1} の公約数は同時に r_{k+1} と r_{k+2} の公約数であることから、

$$\gcd(r_k, r_{k+1}) = \gcd(r_{k+1}, r_{k+2})$$

といえる。したがって

$$\gcd(r_{k+1}, r_{k+2}) = \gcd(p, q)$$

が成り立つから、 $j=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上より、題意は示された。

(証明終)

(3)

$p = r_1, q = r_2$ とし、 f_k, r_{k+2} ($k=1, 2, \dots$) をそれぞれ r_k を r_{k+1} で割った商、余りとして帰納的に定める。ただし、ある n で $r_{n+1} = 0$ となった場合は $f_n, f_{n+1}, \dots, r_{n+2}, r_{n+3}, \dots$ は 0 と定める。数列 $\{r_n\}$ は 0 以上の整数の列であり、0 になるまでは単調に減少するから、 $r_m = 0$ となる m が存在する。初めて $r_m = 0$ となる m を $n+1$ とすれば、 $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, r_1, r_2, \dots, r_n$ は (2) の条件を満たす。したがって、互いに素な自然数 p, q に対して、(2) のような関係をみたす

$f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, r_1, r_2, \dots, r_n$ が存在する。また、(2) より $\gcd(p, q) = \gcd(r_{n-1}, r_n)$ であり、 p, q が互いに素であることから $\gcd(p, q) = 1$ である。 $r_{n-1} = f_{n-1} r_n$ より $\gcd(r_{n-1}, r_n) = r_n$ であることから $r_n = 1$ である。このとき、

$$a_j r_{n-j+1} + b_j r_{n-j} = 1 \quad (j = 0, 1, \dots, n-2) \quad \dots \textcircled{5}$$

をみたすような整数 a_j, b_j が存在することを、 j に関する数学的帰納法で示す。

[1] $j=0$ のとき

$$0 \cdot r_{n-1} + 1 \cdot r_n = 1$$

より、 $a_0 = 0, b_0 = 1$ とすれば $\textcircled{5}$ は成り立つ。

[2] $j=k$ ($k \leq n-3$) のとき

$$a_k r_{n-k+1} + b_k r_{n-k} = 1$$

をみたす a_k, b_k が存在すると仮定する。

$$r_{n-k-2} = f_{n-k-2} r_{n-k-1} + r_{n-k}$$

であるから

$$\begin{aligned} a_k r_{n-k+1} + b_k (r_{n-k-2} - f_{n-k-2} r_{n-k-1}) &= 1 \\ \Leftrightarrow b_k r_{n-k-2} + (a_k - b_k f_{n-k-2}) r_{n-k-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow b_k r_{n-(k+1)-1} + (a_k - b_k f_{n-k-2}) r_{n-(k+1)} &= 1 \end{aligned}$$

より、 $a_{k+1} = b_k, b_{k+1} = a_k - b_k f_{n-k-2}$ が存在し、 $j=k+1$ のときも $\textcircled{5}$ は成り立つ。

以上より、 $\textcircled{5}$ は $j=n-2$ のときも成り立つから

$$\begin{aligned} a_{n-2} r_{n-(n-2)-1} + b_{n-2} r_{n-(n-2)} &= 1 \\ \Leftrightarrow a_{n-2} r_1 + b_{n-2} r_2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a_{n-2} p + b_{n-2} q &= 1 \end{aligned}$$

となり、 $ap + bq = 1$ をみたす整数 $a = a_{n-2}, b = b_{n-2}$ が存在することが示された。

(証明終)