

$$(1) \begin{cases} y = (x-a)^2 - a \\ y = -x^2 \end{cases}$$

連立して、

$$\begin{aligned} -x^2 &= (x-a)^2 - a \\ &= x^2 - 2ax + a^2 - a \end{aligned}$$

よって、

$$2x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$$

この x の 2 次方程式が異なる 2 解をもてばよいので、判別式 $D > 0$ を用いる.

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^2 - 2(a^2 - a) \\ &= -a^2 + 2a \\ &= -a(a-2) > 0 \\ &= a(a-2) < 0 \end{aligned}$$

これをみたす a の範囲は

$$0 < a < 2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - (\alpha+\beta)\frac{1}{2}x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \left(\frac{1}{3}\beta^3 - (\alpha+\beta)\frac{1}{2}\beta^2 + \alpha\beta^2 \right) - \left(\frac{1}{3}\alpha^3 - (\alpha+\beta)\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha^2\beta \right) \\ &= \left(-\frac{1}{6}\beta^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta^2 \right) - \left(-\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2\beta \right) \\ &= -\frac{1}{6}(\beta^3 - 3\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta - \alpha^3) \\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

$$\text{以上より, } \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad (\text{証明終わり})$$

(3) C_1, C_2 の 2 交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおく.

C_1, C_2 を連立した方程式 $2x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$

の 2 解が α, β より、これが

$$2(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

と因数分解できることに注意して、 $S(a)$ を求める.

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 - ((x-a)^2 - a)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-2(x-\alpha)(x-\beta)\} dx \\ &= -\frac{2}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

ここで、 α, β について、 $2x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ の 2 解が α, β より、
解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = \frac{a^2 - a}{2} \end{cases}$$

これを用いれば、

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= a^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - a}{2} \\ &= -a^2 + 2a \end{aligned}$$

$0 < a < 2, \alpha < \beta$ より、

$$\beta - \alpha = \sqrt{-a^2 + 2a}$$

よって、

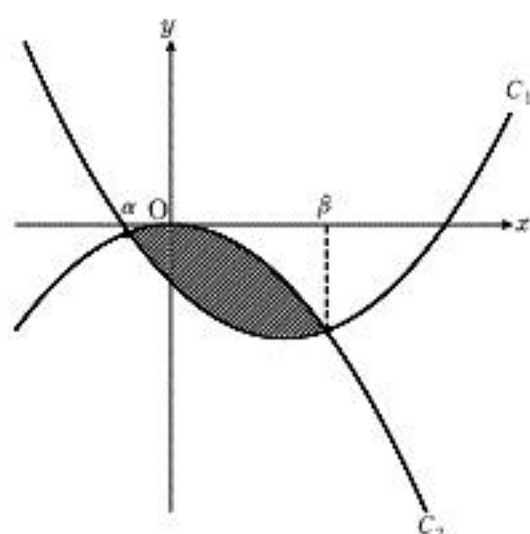
$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{3}(\sqrt{-a^2 + 2a})^3 \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{-(a-1)^2 + 1})^3 \end{aligned}$$

$0 < a < 2$ において $S(a)$ が最大となるのは、 $a = 1$ のときであり、

$$S(1) = \frac{1}{3}$$

以上より、

$$\text{最大値 } \frac{1}{3} \quad (a=1) \cdots \cdots (\text{答})$$

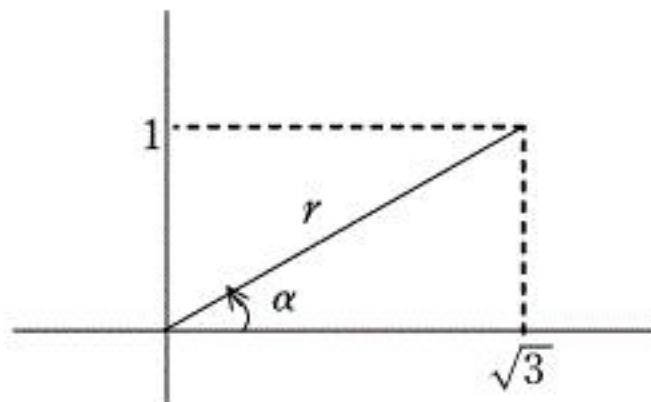


$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \\ &= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned} &2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{6} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \end{aligned}$$

となり成立する.



図より $r=2$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x &= \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \text{ より,} \\ x^2 &= 3 \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 2 \sin^2 \theta + 1 \\ &= \sqrt{3} \sin 2\theta + (1 - \cos 2\theta) + 1 \\ &= \sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta + 2 \end{aligned}$$

よって,

$$\sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta = x^2 - 2$$

ここで,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta - 2\sqrt{2}(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta) \\ &= x^2 - 2 - 2\sqrt{2}x \\ &= x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ より, } -1 \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$$

よって, $-2 \leq x \leq 2$

$f(\theta)$ の $-2 \leq x \leq 2$ における最大・最小を調べる.

$$\begin{aligned} f(\theta) &= x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 \\ &= (x - \sqrt{2})^2 - 4 \end{aligned}$$

図より,

最大値 $2 + 4\sqrt{2}$

このとき, $x = -2$ より,

$$\begin{aligned} 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) &= -2 \\ \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) &= -1 \end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ より,

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi$$

よって, $\theta = \frac{4}{3}\pi$

最小値 -4

このとき, $x = \sqrt{2}$ より,

$$\begin{aligned} 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) &= \sqrt{2} \\ \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

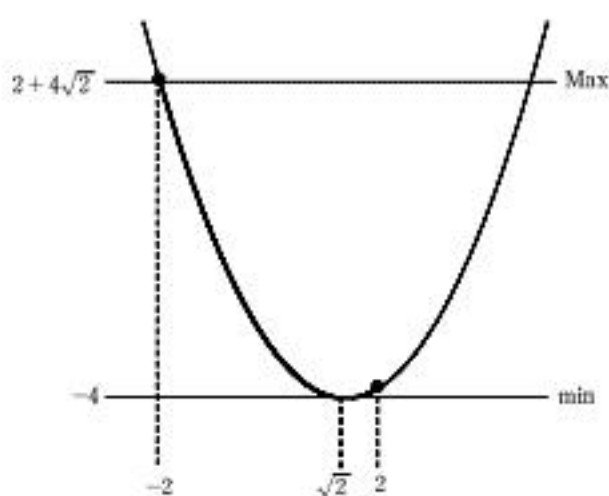
$0 \leq \theta \leq 2\pi$ より,

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

よって, $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{7}{12}\pi$

以上より,

$$\begin{aligned} &\text{最大値 } 2 + 4\sqrt{2} \quad \left(\theta = \frac{4}{3}\pi \right) \\ &\text{最小値 } -4 \quad \left(\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{7}{12}\pi \right) \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$



r について

$b \backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-1	-1	-1	-1
2	0	0	-1	-1	-1	-1
3	0	1	0	-1	-1	-1
4	0	0	1	0	-1	-1
5	0	1	2	1	0	-1
6	0	0	0	2	1	0

 s について

$b \backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	-1	0	0	0	0	0
2	-1	-1	1	0	1	0
3	-1	-1	-1	1	2	0
4	-1	-1	-1	-1	1	2
5	-1	-1	-1	-1	-1	1
6	-1	-1	-1	-1	-1	-1

(1) $r=0$ となる確率は

$$\frac{14}{36} = \frac{7}{18} \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) $rs=0$ となるのは

$r=0$ または $s=0$ のときであり $r=0$ かつ $s=0$ となることはない.

よって表より,

$$\frac{14}{36} + \frac{8}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) $r=1$ となる確率は,

$$\frac{5}{36} > 0$$

$r=2$ となる確率は,

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18} > 0$$

$r=3 \sim 6$ となる確率は,

$$0$$

これより, $r=n$ となる確率が正となる n のうち,
最大のものは,

$$2 \cdots \cdots (\text{答})$$

(1) $496 = 2^4 \times 31$ より, 正の約数の総和 N とすれば,

$$\begin{aligned} N &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \times (31^0 + 31^1) \\ &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16) \times (1 + 31) \\ &= 31 \times 32 \\ &= 992 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 496} \\ 2 \overline{) 248} \\ 2 \overline{) 124} \\ 2 \overline{) 62} \\ 31 \end{array}$$

これより, 496 の約数のうち 496 以外を足したものは,
 $992 - 496 = 496$ となり, 496 は完全数といえる.

(2)

$n = 2^{m-1} \cdot (2^m - 1)$ の正の約数の総和を N とすれば $2^m - 1$ は 2 でない素数であるから

$$\begin{aligned} N &= (\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{m-1}}_{\text{初項 1, 公比 2, 項数 } m \text{ の等比数列の和}}) (1 + (2^m - 1)) \\ &= \frac{1 \cdot (2^m - 1)}{2 - 1} \times 2^m \\ &= 2^m \cdot (2^m - 1) \\ &= 2 \cdot 2^{m-1} \cdot (2^m - 1) = 2n \end{aligned}$$

となり, n の約数のうち, n 以外を足したものは,

$$2n - n = n \text{ となり, } n \text{ は完全数といえる.} \quad (\text{証明終わり})$$