

1

$$(1) \begin{cases} \alpha = -4 - 2i \\ \beta = 2 + i \end{cases}$$

より

$$\beta = -\frac{\alpha}{2}$$

であるから、与式に代入して

$$\begin{aligned} |z - \alpha| &= 2|z - \beta| \\ &= 2\left|z + \frac{1}{2}\alpha\right| \\ &= |2z + \alpha| \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

2 乗して

$$\begin{aligned} |z - \alpha|^2 &= |2z + \alpha|^2 \\ (z - \alpha)(\overline{z - \alpha}) &= (2z + \alpha)(\overline{2z + \alpha}) \\ (z - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) &= (2z + \alpha)(2\overline{z} + \overline{\alpha}) \\ z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha} &= 4z\overline{z} + 2\overline{\alpha}z + 2\alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha} \\ 3z\overline{z} + 3\overline{\alpha}z + 3\alpha\overline{z} &= 0 \\ z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} &= 0 \\ (z + \alpha)(\overline{z} + \overline{\alpha}) &= \alpha\overline{\alpha} \\ |z + \alpha|^2 &= |\alpha|^2 \end{aligned}$$

よって

$$|z + \alpha| = |\alpha|$$

となり、これは中心 複素数 $-\alpha$ が表す点で、半径 $|\alpha|$ の円といえる。 (証明終わり)

以上より、

$$\text{中心} \quad 4 + 2i \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$\text{半径} \quad |\alpha| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) ①より

$$|z - \alpha| = |2z + \alpha|$$

$$w = \frac{1}{z} \text{ より, } z = \frac{1}{w} \text{ とかけるので代入すると}$$

$$\left|\frac{1}{w} - \alpha\right| = \left|\frac{2}{w} + \alpha\right|$$

$$\text{両辺} \times \left|\frac{w}{\alpha}\right| \text{ とすると}$$

$$\left|\frac{1}{\alpha} - w\right| = \left|\frac{2}{\alpha} + w\right|$$

よって

$$\left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = \left|w + \frac{2}{\alpha}\right|$$

$$\left|w - \frac{1}{\alpha}\right| \text{ は } w \text{ と } \frac{1}{\alpha} \text{ の距離であり,}$$

$$\left|w + \frac{2}{\alpha}\right| \text{ は } w \text{ と } -\frac{2}{\alpha} \text{ の距離であるから,}$$

$$w \text{ は } \frac{1}{\alpha} \text{ が表す点 P と } -\frac{2}{\alpha} \text{ が表す点 Q の垂直二等分線を表すとわかる.}$$

ゆえに、 w は直線である。

(3) $A(\alpha)$ と $B\left(-\frac{1}{2}\alpha\right)$ がつくる直線 l と、 $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ と $Q\left(-\frac{2}{\alpha}\right)$ がつくる直線 n のなす角が $\frac{\pi}{2} - \theta$ となるので

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \theta &= \arg \frac{\alpha - \left(-\frac{1}{2}\alpha\right)}{\frac{1}{\alpha} - \left(-\frac{2}{\alpha}\right)} \\ &= \arg \frac{\frac{3}{2}\alpha}{\frac{3}{\alpha}} \\ &= \arg \left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \\ &= \arg(\alpha^2) \end{aligned}$$

これより、 $A(\alpha)$ の偏角を a とすれば

$$\frac{\pi}{2} - \theta = 2a$$

とわかる。(ド・モアブルの定理より)

いま、 $\alpha = -4 - 2i$ を極形式で表すと

$$\alpha = 2\sqrt{5} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right)$$

より、

$$\begin{cases} \cos a = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{よって, } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \cos 2a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin 2a \\ &= 2\sin a \cos a \\ &= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

これは、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に存在する。

$$\text{以上より, } \cos \theta = \frac{4}{5} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(1) \quad f(x) = (x^2 + 1)^{-n}$$

より

$$\begin{aligned} f'(x) &= -n(x^2 + 1)^{-n-1} \times 2x \\ &= -\frac{2nx}{(x^2 + 1)^{n+1}} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad I_n = \int_0^1 1 \times \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2nx^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n \left\{ \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n \left\{ \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx}_{I_n} - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx}_{I_{n+1}} \right\} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 2nI_{n+1} &= \frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n \\ I_{n+1} &= \frac{1}{2n} \left\{ (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n} \right\} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx = I_3$$

より, (2)の結果に $n=2$ を代入すると

$$I_3 = \frac{1}{4} \left\{ 3I_2 + \frac{1}{2^2} \right\} = \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{16}$$

ここで, I_2 について

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$x = \tan \theta \text{ とおくと, } \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\tan^2 \theta + 1)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\left(\text{※ } \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ より} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

以上より

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{16} \\ &= \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(1) H は平面 CEFG と同一平面上かつ, $\overrightarrow{CE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CG} = \vec{b}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OC} + \alpha \overrightarrow{CE} + \beta \overrightarrow{CG} \\ &= \vec{c} + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}\end{aligned}$$

とおける.

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{OA}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \vec{a} &= 0 \\ (\vec{c} + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \cdot \vec{a} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \alpha |\vec{a}|^2 + \beta \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 3 + 4\alpha + 4\beta = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{OB}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \vec{b} &= 0 \\ (\vec{c} + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} + \alpha \vec{a} \cdot \vec{b} + \beta |\vec{b}|^2 \\ &= 5 + 4\alpha + 9\beta = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①, ②より

$$\beta = -\frac{2}{5}$$

①より

$$\alpha = -\frac{7}{20}$$

以上より

$$\overrightarrow{OH} = \vec{c} - \frac{7}{20}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OH}|^2 &= |\vec{c}|^2 + \frac{49}{400}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{25}|\vec{b}|^2 - \frac{7}{10}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{7}{25}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{4}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= 4 + \frac{49}{400} \cdot 4 + \frac{4}{25} \cdot 9 - \frac{7}{10} \cdot 3 + \frac{7}{25} \cdot 4 - \frac{4}{5} \cdot 5 \\ &= \frac{95}{100}\end{aligned}$$

以上より

$$|\overrightarrow{OH}| = \frac{\sqrt{95}}{10} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) 求める体積を V とすると

$$V = \square OADB \times |\overrightarrow{OH}|$$

ここで $\square OADB$ について, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とすれば ($0 < \theta < \pi$)

$$\square OADB = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \sin \theta$$

いま, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ より

$$4 = 2 \times 3 \times \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2}{3}$$

このとき, $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ である

よって,

$$\begin{aligned}\square OADB &= 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}V &= 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{95}}{10} \\ &= \sqrt{19} \quad \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$