

(1)

三角関数の加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

であり、①-②より

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta \\ \therefore \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

与えられた等式の左辺は

$$2 \sum_{k=1}^N \cos kx \sin \frac{x}{2}$$

と表せる。それぞれの k に対して $\alpha = kx$, $\beta = \frac{x}{2}$ として、(1)で与えられた等式を用いると、

$$\begin{aligned} & (\cos x + \cos 2x + \cdots \cos Nx) \times 2 \sin \frac{x}{2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \cos kx \sin \frac{x}{2} \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ \sin \left(kx + \frac{x}{2} \right) - \sin \left(kx - \frac{x}{2} \right) \right\} \\ &= \left(\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{x}{2} \right) + \left(\sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x \right) + \cdots + \left\{ \sin \left(Nx + \frac{x}{2} \right) - \sin \left(Nx - \frac{x}{2} \right) \right\} \\ &= \sin \left(Nx + \frac{x}{2} \right) - \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

となるから、与式が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

(2)の等式に $N=4$ を代入すると、

$$(\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x) \times 2 \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{9}{2}x - \sin \frac{x}{2}$$

であり、 $0 < x < 2\pi$ のとき $\sin \frac{x}{2} > 0$ であることを考慮すると、

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{9}{2}x - \sin \frac{x}{2} = 0$$

である。三角関数の和積の公式より

$$\begin{aligned} \sin \frac{9}{2}x - \sin \frac{x}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos \frac{5}{2}x \sin 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \frac{5}{2}x = 0, \sin 2x &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \frac{5}{2}x < 5\pi$ より、

$$\begin{aligned} \cos \frac{5}{2}x = 0 &\Leftrightarrow \frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi \\ \therefore x &= \frac{\pi}{5}, \frac{3}{5}\pi, \pi, \frac{7}{5}\pi, \frac{9}{5}\pi \end{aligned}$$

であり、 $0 < 2x < 4\pi$ より、

$$\begin{aligned} \sin 2x = 0 &\Leftrightarrow 2x = \pi, 2\pi, 3\pi \\ \therefore x &= \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

である。以上より求める x は、

$$x = \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{5}\pi, \pi, \frac{7}{5}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{9}{5}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{5}\pi, \pi, \frac{7}{5}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{9}{5}\pi$$

(1)

$k=0, 1, \dots, n-1$ に対して $\frac{\pi}{n}k \leq x \leq \frac{\pi}{n}(k+1)$ のとき、問題文の条件より

$$f\left(\frac{\pi}{n}k\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{n}(k+1)\right)$$

が成り立つ。各辺に $|\sin nx|$ (≥ 0) をかけて

$$f\left(\frac{\pi}{n}k\right)|\sin nx| \leq f(x)|\sin nx| \leq f\left(\frac{\pi}{n}(k+1)\right)|\sin nx|$$

となる。各辺を $\frac{\pi}{n}k$ から $\frac{\pi}{n}(k+1)$ まで x で積分すると

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} f\left(\frac{\pi}{n}k\right)|\sin nx| dx &\leq \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} f(x)|\sin nx| dx \leq \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} f\left(\frac{\pi}{n}(k+1)\right)|\sin nx| dx \\ \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{n}k\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx &\leq \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} f(x)|\sin nx| dx \leq f\left(\frac{\pi}{n}(k+1)\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx \end{aligned}$$

である。各辺について $k=0$ から $k=n-1$ まで和を取ること

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} f(x)|\sin nx| dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi}{n}(k+1)\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} (\textcircled{1} \text{の中辺}) &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(x)|\sin nx| dx + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} f(x)|\sin nx| dx + \dots + \int_{\frac{(n-1)\pi}{n}}^{\pi} f(x)|\sin nx| dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x)|\sin nx| dx \end{aligned}$$

であるから、

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx \leq \int_0^{\pi} f(x)|\sin nx| dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi}{n}(k+1)\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

自然数 n に対して、

$$\frac{\pi}{n}k \leq x \leq \frac{\pi}{n}(k+1) \Leftrightarrow k\pi \leq nx \leq (k+1)\pi$$

であることに注意し、 k の偶奇によって場合分けして考える。

[1] $k=2l-1$ (l は整数) のとき

$(2l-1)\pi \leq nx \leq 2l\pi$ の範囲では $|\sin nx| = -\sin nx$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx &= \int_{\frac{\pi}{n}(2l-1)}^{\frac{2l\pi}{n}} (-\sin nx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_{\frac{\pi}{n}(2l-1)}^{\frac{2l\pi}{n}} \\ &= \frac{1}{n} (\cos 2l\pi - \cos (2l-1)\pi) \\ &= \frac{1}{n} (1+1) \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

となる。

[2] $k=2l$ (l は整数) のとき

$2l\pi \leq nx \leq (2l+1)\pi$ の範囲では $|\sin nx| = \sin nx$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx &= \int_{\frac{2l\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}(2l+1)} \sin nx dx \\ &= \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_{\frac{2l\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}(2l+1)} \\ &= -\frac{1}{n} (\cos (2l+1)\pi - \cos 2l\pi) \\ &= -\frac{1}{n} (-1-1) \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、自然数 n と整数 k に対して、 $\int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx = \frac{2}{n}$ である。

$$(\text{答}) \quad \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx = \frac{2}{n}$$

(3)

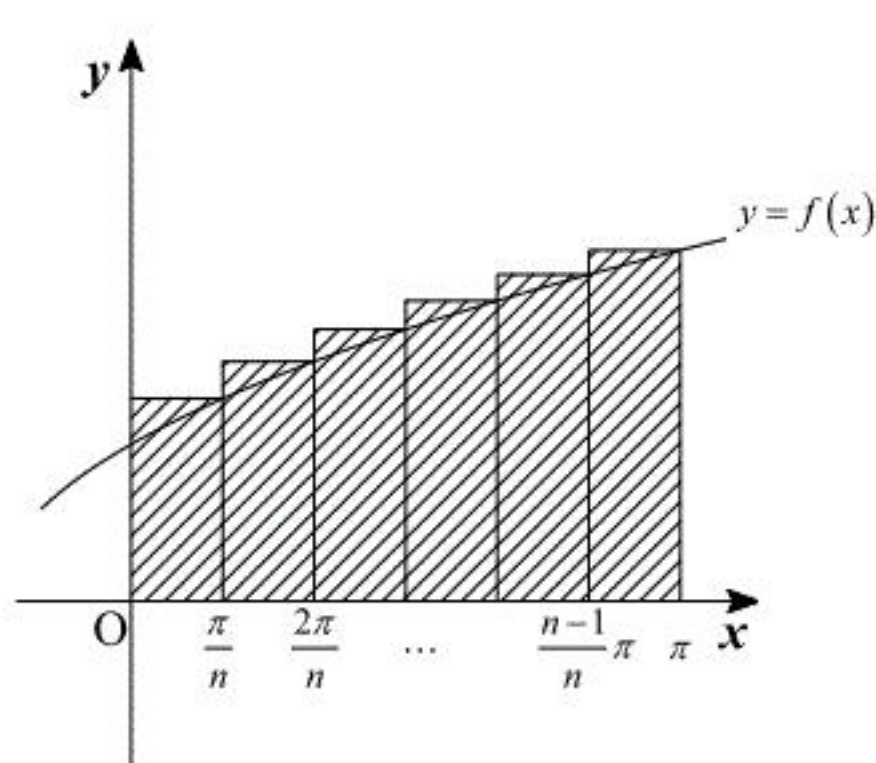
(1), (2)より、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) \leq a_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} f\left(\frac{\pi}{n}(k+1)\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

$$(\textcircled{2} \text{の右辺}) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}k\right)$$

と変形できる。ここで、 $\sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}k\right)$ は下図の斜線部の面積に等しい。



よって、区区分求積法より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) = \int_0^{\pi} f(x) dx$$

が成り立つから、

$$(\textcircled{2} \text{の右辺}) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。同様に、

$$\begin{aligned} (\textcircled{2} \text{の左辺}) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) + \frac{\pi}{n} f(0) - \frac{\pi}{n} f(\pi) \right\} \\ &\rightarrow \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} f(x) dx + 0 \cdot f(0) - 0 \cdot f(\pi) \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。したがって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

であり、数列 $\{a_n\}$ は収束する。

(証明終)

(1)

$C: y = \frac{1}{2}x^2$ を x で微分すると $y' = x$ であるから、放物線 C 上の点 $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ における接線の方程式は

$$y = t(x - t) + \frac{1}{2}t^2$$

$$\Leftrightarrow y = tx - \frac{1}{2}t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と求まる。次に法線の方程式を求める。 $t = 0$ のときは原点を通り x 軸に垂直な直線となるから $x = 0$ である。 $t \neq 0$ のときは点 $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ を通り傾き $-\frac{1}{t}$ の直線となるから

$$y = -\frac{1}{t}(x - t) + \frac{1}{2}t^2$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2ty - t^3 - 2t = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

と求まる。②において $t = 0$ とすると直線 $x = 0$ に一致する。よって、全ての実数 t において②は求める法線の方程式に一致する。

$$(\text{答}) \text{ 接線の方程式: } y = tx - \frac{1}{2}t^2, \text{ 法線の方程式: } 2x + 2ty - t^3 - 2t = 0$$

(2)

直線①が点 $P(a, b)$ を通るとき

$$b = ta - \frac{1}{2}t^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2at + 2b = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。放物線 C 上では異なる接点には異なる接線が対応するため、題意より t についての2次方程式③が異なる2つの実数解を持てば良い。したがって、③の判別式を D としたとき $D > 0$ となればよいから、求める条件は

$$\frac{D}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow (-a)^2 - 2b > 0$$

$$\Leftrightarrow b < \frac{1}{2}a^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad b < \frac{1}{2}a^2$$

(3)

直線②が点 $P(a, b)$ を通るとき

$$2a + 2tb - t^3 - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 2(b-1)t - 2a = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。放物線 C 上では異なる点には異なる法線が対応するため、題意より t についての3次方程式④が異なる3つの実数解を持てば良い。 $f(t) = t^3 - 2(b-1)t - 2a$ とすると

$$f'(t) = 3t^2 - 2(b-1)$$

である。以下、 $y = f(t)$ のグラフが t 軸と異なる3つの共有点を持つ条件を考える。

[1] $b-1 \leq 0 \Leftrightarrow b \leq 1$ のとき

$f'(t) \geq 0$ となるから、 $y = f(t)$ は単調増加する。したがって、 $y = f(t)$ のグラフと t 軸は1点しか共有点を持たないため、不適である。

[2] $b-1 > 0 \Leftrightarrow b > 1$ のとき

$$\alpha = \sqrt{\frac{2(b-1)}{3}} \text{ とおくと } \alpha > 0 \text{ であり}$$

$$f'(t) = 3(t+\alpha)(t-\alpha)$$

と変形できるから、 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、 $y = f(t)$ のグラフが t 軸と異なる3つの共有点を持つ条件は

$$f(\alpha) < 0 \text{ かつ } f(-\alpha) > 0$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^3 - 2(b-1)\alpha - 2a \\ &= \alpha\{\alpha^2 - 2(b-1)\} - 2a \\ &= \sqrt{\frac{2(b-1)}{3}} \left\{ \frac{2(b-1)}{3} - 2(b-1) \right\} - 2a \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(b-1)^{\frac{3}{2}} - 2a \end{aligned}$$

であり、 $a > 0$ 、 $(b-1)^{\frac{3}{2}} > 0$ より $f(\alpha) < 0$ は常に成立する。同様にして、

$$\begin{aligned} f(-\alpha) &= (-\alpha)^3 - 2(b-1) \cdot (-\alpha) - 2a \\ &= -\{\alpha^3 - 2(b-1)\alpha\} - 2a \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(b-1)^{\frac{3}{2}} - 2a \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} f(-\alpha) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(b-1)^{\frac{3}{2}} &> 2a \\ \Leftrightarrow a^2 &< \frac{8}{27}(b-1)^3 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

より、求める条件は $a^2 < \frac{8}{27}(b-1)^3$ である。

以上[1],[2]より、

$$b > 1 \text{ かつ } a^2 < \frac{8}{27}(b-1)^3$$

であり、 $\frac{8}{27}(b-1)^3 > 0 \Leftrightarrow b > 1$ であるから、求める条件は

$$a^2 < \frac{8}{27}(b-1)^3$$

である。

$$(\text{答}) \quad a^2 < \frac{8}{27}(b-1)^3$$