

入学試験問題

前

数学 (B)

(配点 120 点)

平成 7 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
- 2 この問題冊子は 20 ページある。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所を見いだした場合には手をあげて監督者にすみやかに申し出よ。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用せよ。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されるが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答せよ。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（第 1 面 2 箇所、第 2 面 1 箇所）、科類、氏名を記入せよ。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入せよ。記入箇所を誤った解答は、その解答に限り無効である。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはならない。また、解答用紙の欄外の余白には、何もしるしてはならない。これらに違反した答案は、無効とする。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはならない。
- 9 解答用紙および問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受 験 番 号						
---------	--	--	--	--	--	--

上欄に受験番号を記入せよ。

第 1 問

すべての正の実数 x, y に対し

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq k \sqrt{2x + y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

第 2 問

$f(x) = 1 - \sin x$ に対し, $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$ とおく。

このとき, 任意の実数 x, y について

$$g(x+y) + g(x-y) \geq 2g(x)$$

が成り立つことを示せ。

第 3 問

二辺の長さが 1 と 2 の長方形と一辺の長さが 2 の正方形の 2 種類のタイルがある。縦 2、横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える。そのような並べ方の総数を A_n で表す。ただし n は正の整数である。たとえば $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = 5$ である。このとき以下の問に答えよ。

(1) $n \geq 3$ のとき、 A_n を A_{n-1} , A_{n-2} を用いて表せ。

(2) A_n を n で表せ。

N を正の整数とする。 N の正の約数 n に対し

$$f(n) = n + \frac{N}{n}$$

とおく。このとき、次の各 N に対して $f(n)$ の最小値を求めよ。

(1) $N = 2^k$, ただし k は正の整数

(2) $N = 7!$

サイコロを n 回投げて、 xy 平面上の点 $P_0, P_1, \dots, P_n$ を次の規則 (a), (b) によって定める。

(a) $P_0 = (0, 0)$

(b) $1 \leq k \leq n$ のとき、 k 回目に出た目の数が 1, 2, 3, 4 のときには、 P_{k-1} をそれぞれ東、北、西、南に $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ だけ動かした点を P_k とする。また k 回目に出た目の数が 5, 6 のときには $P_k = P_{k-1}$ とする。ただし y 軸の正の向きを北と定める。

このとき以下の問に答えよ。

- (1) P_n が x 軸上にあれば、 $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ もすべて x 軸上にあることを示せ。
- (2) P_n が第 1 象限 $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ にある確率を n で表せ。

原点を O とする xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

上の点 P における接線と 2 つの漸近線との交点を Q, R とする。このとき以下の問に答えよ。

- (1) 三角形 OQR の面積 S は、点 P のとり方にはよらず、 a, b によって定まることを示せ。
- (2) $a = 5e^{2t} + e^{-t}$, $b = e^{2t} + e^{-t}$ として実数 t を変化させるときの S の最小値を求めよ。