

入学試験問題

前

数学 (B)

(配点 120 点)

平成 8 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
- 2 この問題冊子は 20 ページある。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所を見いだした場合には手をあげて監督者にすみやかに申し出よ。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用せよ。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されるが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答せよ。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（第 1 面 2 箇所、第 2 面 1 箇所）、科類、氏名を記入せよ。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入せよ。記入箇所を誤った解答は、その解答に限り無効である。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはならない。また、解答用紙の欄外の余白には、何もしるしてはならない。これらに違反した答案は、無効とする。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはならない。
- 9 解答用紙および問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受 験 番 号						
---------	--	--	--	--	--	--

上欄に受験番号を記入せよ。

第 1 問

xy 平面において、行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし、点 $(1, 0)$ を中心とする半径 $\frac{1}{3}$ の円を C とする。 f による C の像が直線 $x = \frac{2}{3}$ に接し、かつ領域 $D = \{(x, y) | x > 0\}$ に含まれるような (a, b) 全体のなす図形を ab 平面上に図示せよ。

第 2 問

a, b, c, d を正の数とする。不等式

$$\begin{cases} s(1-a) - tb > 0 \\ -sc + t(1-d) > 0 \end{cases}$$

を同時にみたす正の数 s, t があるとき、2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$$

は $-1 < x < 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

第 3 問

空間内の点 O を中心とする一辺の長さが l の立方体の頂点を $A_1, A_2, \dots, A_8$ とする。また、 O を中心とする半径 r の球面を S とする。

- (1) S 上のすべての点から $A_1, A_2, \dots, A_8$ のうち少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。
- (2) S 上のすべての点から $A_1, A_2, \dots, A_8$ のうち少なくとも 2 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。

ただし、 S 上の点 P から A_k が見えるとは、 A_k が S の外側にあり、線分 PA_k と S との共有点が P のみであることとする。

第 4 問

1つのサイコロを続けて投げて、それによって a_n ($n=1, 2, \dots$) を以下のよう
に定める。

出た目の数を順に $c_1, c_2, \dots$ とするとき、

$1 \leq k \leq n-1$ をみたすすべての整数 k に対し $c_k \leq c_n$ ならば $a_n = c_n$ 、

それ以外るとき $a_n = 0$ とおく。ただし、 $a_1 = c_1$ とする。

- (1) a_n の期待値を $E(n)$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(n)$ を求めよ。
- (2) $a_1, a_2, \dots, a_n$ のうち 2 に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき、
 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(n)$ を求めよ。

第 5 問

xyz 空間内の円柱 $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ を側面とする容器に、水面が $z = 0$ と一致するように $z \leq 0$ の部分に水がはいっている。

$z \geq 0$ に対して定義された連続な関数 $r(z)$ で

$$r(0) = 0, \quad 0 \leq r(z) < R$$

をみたすものを考える。 xz 平面内の不等式

$$0 \leq x \leq r(z), \quad z \geq 0$$

で表される領域を z 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を毎秒 1 の速さで下に動かすと、 t 秒後には水面が $z = f(t)$ に上昇するという。

$t \geq 0$ に対し、 $f(t) = e^t - t - 1$ であるとき、関数 $r(z)$ を決定せよ。

α, β を正の数とし, xy 平面において, だ円

$$C: \frac{x^2}{\alpha} + \frac{(y - \sqrt{\beta})^2}{\beta} = 1$$

と領域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ を考える。

- (1) C が D に含まれるような点 (α, β) の範囲を求め, $\alpha\beta$ 平面上に図示せよ。
- (2) 点 (α, β) が (1) で求めた範囲を動くとき, だ円 C の面積の最大値を求めよ。