

入学試験問題

数学 (B)

前

(配点 120 点)

平成 9 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
- 2 問題はすべて新課程と旧課程とに共通である。
- 3 この問題冊子は 20 ページある。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所を見いだした場合には手をあげて監督者にすみやかに申し出よ。
- 4 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用せよ。
- 5 2 枚の解答用紙が渡されるが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答せよ。
- 6 解答用紙の指定欄に、受験番号（第 1 面 2 箇所、第 2 面 1 箇所）、科類、氏名を記入せよ。
- 7 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入せよ。記入箇所を誤った解答は、その解答に限り無効である。
- 8 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはならない。また、解答用紙の欄外の余白には、何もしるしてはならない。これらに違反した答案は、無効とする。
- 9 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはならない。
- 10 解答用紙および問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受験番号						
------	--	--	--	--	--	--

上欄に受験番号を記入せよ。

第 1 問

a, b を正の数とし、 xy 平面の 2 点 $A(a, 0)$ および $B(0, b)$ を頂点とする正 3 角形を ABC とする。ただし、 C は第 1 象限の点とする。

- (1) 3 角形 ABC が正方形 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ に含まれるような (a, b) の範囲を求めよ。
- (2) (a, b) が (1) の範囲を動くとき、3 角形 ABC の面積 S が最大となるような (a, b) を求めよ。また、そのときの S の値を求めよ。

第 2 問

n を正の整数, a を実数とする。すべての整数 m に対して

$$m^2 - (a - 1)m + \frac{n^2}{2n + 1}a > 0$$

が成り立つような a の範囲を n を用いて表せ。

r は $0 < r < 1$ をみたす実数とする。 xyz 空間に原点 $O(0, 0, 0)$ と 2 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ をとる。

(1) xyz 空間の点 P で条件

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = r|\overrightarrow{PO}|$$

をみたすものが存在するような r の範囲を求めよ。

(2) 点 P が (1) の条件をみたして動くとき、内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の最大値、最小値を r の関数と考えてそれぞれ $M(r)$, $m(r)$ で表す。このとき、左からの極限

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^2 \{M(r) - m(r)\}$$

を求めよ。

第 4 問

正3角形 ABC の頂点 A から辺 AB とのなす角が θ の方向に、3角形の内部に向かって出発した光線を考える。ただし $0 < \theta < 60^\circ$ とする。この光線は3角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し、頂点に到達するとそこでとまるものとする。また、3角形の内部では光線は直進するものとする。

- (1) $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき、この光線はどの頂点に到達するかを述べよ。
- (2) 正の整数 k を用いて $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき、この光線の到達する頂点を求め、またそこへ至るまでの反射の回数を k を用いて表せ。

第 5 問

a を $0 < a < \frac{1}{4}$ をみたす実数とする。 xy 平面で、不等式

$$y^2 \leq x^2(1-x^2) - a$$

の表す領域を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

第 6 問

a を実数とする。

- (1) 曲線 $y = \frac{8}{27}x^3$ と放物線 $y = (x + a)^2$ の両方に接する直線が x 軸以外に 2 本あるような a の範囲を求めよ。
- (2) a が (1) の範囲にあるとき、この 2 本の接線と放物線 $y = (x + a)^2$ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。