

入学試験問題

数学 (B)

前

(配点 120 点)

平成 10 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
- 2 問題はすべて新課程と旧課程とに共通である。
- 3 この問題冊子は 20 ページある。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所を見いだした場合には手をあげて監督者にすみやかに申し出よ。
- 4 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用せよ。
- 5 2 枚の解答用紙が渡されるが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答せよ。
- 6 解答用紙の指定欄に、受験番号（第 1 面 2 箇所、第 2 面 1 箇所）、科類、氏名を記入せよ。
- 7 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入せよ。記入箇所を誤った解答は、その解答に限り無効である。
- 8 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはならない。また、解答用紙の欄外の余白には、何もしるしてはならない。これらに違反した答案は、無効とする。
- 9 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはならない。
- 10 解答用紙および問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受験番号						
------	--	--	--	--	--	--

上欄に受験番号を記入せよ。

第 1 問

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x) = (3x^2 - 4) \left(x - a + \frac{1}{a} \right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} x + y + z \leq n \\ -x + y - z \leq n \\ x - y - z \leq n \\ -x - y + z \leq n \end{cases}$$

をみたす xyz 空間の点 $P(x, y, z)$ で、 x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$$

を求めよ。

xy 平面に 2 つの円

$$C_0: x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, \quad C_1: (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

をとり, C_2 を x 軸と C_0, C_1 に接する円とする。さらに, $n = 2, 3, \dots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}, C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。 C_n の半径を r_n , C_n と x 軸の接点を $(x_n, 0)$ として,

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2} r_n}, \quad p_n = q_n x_n$$

とおく。

- (1) q_n は整数であることを示せ。
- (2) p_n も整数で, p_n と q_n は互いに素であることを示せ。
- (3) α を $\alpha = \frac{1}{1 + \alpha}$ をみたす正の数として, 不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3} |x_n - \alpha|$$

を示し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

実数 a に対して $k \leq a < k + 1$ をみたす整数 k を $[a]$ で表す。
 n を正の整数として、

$$f(x) = \frac{x^2(2 \cdot 3^3 \cdot n - x)}{2^5 \cdot 3^3 \cdot n^2}$$

とおく。 $36n + 1$ 個の整数

$$[f(0)], [f(1)], [f(2)], \dots, [f(36n)]$$

のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。

θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。 xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

をとり、点 $P_n, Q_n, n = 1, 2, \dots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_1} = (1, 0) \\ \overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n}) \vec{a} \\ \overrightarrow{OP_{n+1}} = 4 \{ \overrightarrow{OQ_n} - (\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n}) \vec{b} \} \end{cases}$$

で定める。ただし、 O は原点で、 $\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n}$ および $\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n}$ はベクトルの内積を表す。
 $\overrightarrow{OP_n} = (x_n, y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。
 さらに、このような θ に対して、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

を求めよ。

第 6 問

xyz 空間に 5 点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$, $P(0, 0, 3)$ をとる。四角錐 $PABCD$ の

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

をみたす部分の体積を求めよ。